Bibliothek
des
K. Alten Gymnasiums
in
Regensburg.

Sammlung

von

574 geometrischen Aufgaben

mit

ihren Auflösungen und Beweisen.

Sammlung

von

574 geometrischen Aufgaben

mit

ihren Auflösungen und Beweisen.

Zum Gebrauch

beim Unterricht in höhern Bürger-, Real-, Gewerbschulen und Gymnasien, und beim Selbstudium der Geometrie.

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg.

Von

A. W. Hertel,

Oberlehrer an der Königlichen Provinzial-Gewerbschule zu Naumburg a. d. S.

Mit 546 Figuren auf 18 Kupfertafeln.

Leipzig, 1838.
Baumgärtners Buchhandlung.

Staatliche Bibliothek
Regensburg
S. 1964/136

Vorerrinnerung.

Die Mathematik hat, vorzugsweise vor andern Wissenschaften, eigenthümliche abgeleitete Sätze, die unter dem Titel „Aufgaben" aufhören integrirende Theile der reinen Mathematik zu sein, ohne daß sie deßhalb der angewandten zugetheilt werden könnten; doch nähert sich ihre Tendenz dem Praktischen.

Dahin gehören die geometrischen Constructionen, und zwar ausschließlich die, welche nicht aus der Verbindung der Geometrie mit der Algebra entspringen, weniger die Construction algebraischer Ausdrücke. Jene sind zweckmäßige Vorstudien für das praktische Leben, diese mehr für das, welches Mathematik als reine Wissenschaft treibt.

Die Aufgaben, welche eigentlicher Calcul sind, gehören nicht hieher; sie sind schon Praxis selbst.

Die Schriftsteller sind, seit Euklid, über die Stellung dieser Aufgaben zum Lehrgange nicht einig gewesen; sie haben sie theils, gestützt auf den Vorgang des Euklids, bunt in die Lehrsätze eingemengt, theils in besondern Anhängen den einzelnen Kapiteln angeschlossen, und nur in neuerer Zeit hat man angefangen sie, in besondere Abtheilungen vereinigt, den Lehrbüchern beizugeben.

Am reinsten unter den neuern Schriftstellern scheidet sie H. Prof. F. Wolff in seinem Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1830.

Ich schließe mich diesem an und bin nicht einverstanden mit denen, die dergleichen Aufgaben, als Anwendung

einzelner vorhergegangener Elementarsätze, einschalten, damit Theorie und Praxis zusammenwerfen und den Anfänger leicht zu dem Glauben hinziehen, daß es mit den theoretischen Wahrheiten nichts sei, als eine beschränkte Unterweisung, eine Normale, ein Dreieck, Vieleck oder dergl. zu zeichnen.

Nicht allein, daß so jede höhere, allgemeinere Ansicht im Keim vernichtet werden kann, so entstehen daraus auch noch andere Unbequemlichkeiten; wenn wir auch ganz davon abstrahiren, daß die reine Geometrie solcher mechanischer Uebungen an sich nicht bedarf.

Es können nemlich bei genannter Einrichtung nur wenige und einfache Aufgaben eingestreut werden; und da dem Schüler gleichsam geboten wird, die Auflösungen und Beweise unbedingt auf den oder jenen Lehrsatz zu gründen, wird so die freie Geistesbewegung und der Reiz des Selbsterfindens ganz unterdrückt; die Lösung tritt dann gewöhnlich, aller Eleganz beraubt, wie im Schnürleib hervor, und die Kette der Elementarsätze wird unangenehm unterbrochen; obgleich dem Lehrer daran liegen muß, den Schülern ihren innigen Zusammenhang recht bemerklich zu machen.

Bildet man aber aus diesen Aufgaben eine besondere Abtheilung, trennt sie von dem algebraischen und von dem calculirenden Theil, so wird man in vieler Hinsicht gewinnen. Indeß es für den Unterricht und für die Bearbeitung einer Aufgabe völlig indifferent bleibt, ob der Schüler den oder jenen Satz benützt, ob er z. B. die Bildung einer Normale aus der Lehre von den Winkeln, von den Dreiecken oder vom Kreise ableitet, da er bei Zergliederung des Verfahrens doch immer auf die primitiven Sätze zurückkommen wird: erkräftigt sich dagegen der Geist, wenn der Schüler die Beziehungen der Grundlehren auf praktische Anwendung selbst aufsuchen muß; die Verwandschaft der Sätze wird ihm

erst lebendig und klar, und diese Uebungen werden zugleich Prüfungsmittel der erworbenen Kenntnisse und Verarbeitung des Nahrungsstoffes zu Fleisch und Blut.

Setze ich nun voraus, der Schüler habe die reine ebene Geometrie beendet, bevor er an die Auflösung geometrischer Constructionen geht, so schließe ich auch diese Constructionen von dem eigentlichen Lehrvortrage aus und bestimme sie blos zum Gegenstand der häußlichen Uebung, zu Versuchen der innern Kraft und zur Wiederholung des Erlernten. Ich dulde dabei nicht, daß eine Auflösung algebraisch vorbereitet werde. Wird dem Schüler die analytische Entwickelung zu schwer, indem sie allerdings einen geübten Blick erfordert, so möge er lieber durch mechanische Versuche die Lösung errathen. Dieses schadet nicht, wenn nur der Beweis streng und erschöpfend geführt wird. Durch und mit diesem zeigt sich bald das Ueberflüßige, was der Formbildung von einem solchen Verfahren anhängen möchte, zeigen sich kürzere und elegantere Verfahrungsweisen, kurz der analytische Weg, welcher gleich hätte eingeschlagen werden können.

Aus solchem mechanischen Probiren sind öfters überraschende und neue Conjecturen hervorgegangen.

Diese Art der Benutzung verlangt aber, daß der Lehrer die Aufgaben nicht einzeln aus der Masse von Lehrbüchern zusammensuchen müsse, daß er sie vielmehr in großer Auswahl, nach einem übersichtlichen Plan geordnet, und unvermischt mit Allem nicht dahin gehörigen vor sich habe.

Mir ist bisher noch keine Schrift vorgekommen, welche diesen Forderungen entsprochen hätte. Lehrbücher können solchen Aufgaben überhaupt keinen großen Raum widmen, sind sie daher in ihnen auch zweckmäßig zusammengestellt, so bieten sie einzeln genommen doch immer nur eine geringe Auswahl dar. Zwar findet man unter den Lehrbüchern einige,

die reichhaltiger ausgestattet sind, wie z. B. die Uebersetzung von v. Swindens Elementen der Geometrie, Jena 1834 durch H. Prof. C. F. A. Jacobi in den ausgezeichneten Anhängen des H. Uebersetzers; jedoch ist in diesen die Auflösung den wenigsten Aufgaben beigefügt und dadurch, bei den minder einfachen, dem Lehrer ziemlich gleiche Arbeit mit dem Schüler gegeben. Ist aber irgend ein Lehrbuch geeignet die Selbstthätigkeit des Lernenden zu wecken, so ist es das genannte durch diese Anhänge, von denen die Aufgaben nur einen kleinen Theil ausmachen.

In den abgeschlossenen Sammlungen solcher Aufgaben aber mischt sich immer das reine mit dem algebraisch-geometrischen und mit praktischen Anwendungen unter einander, was an der Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, Berlin 1805 u. a. zu tadeln ist. Dadurch wird das Aufsuchen wieder umständlich und die Anzahl rein geometrischer Constructionen gering. In v. Lindauers Sammlung, Stuttgard 1832, ist diese Vermischung noch auffallender; sie wird zugleich durch das Ordnen vom Leichtern zum Schwerern und durch die unzählbaren, sinnentstellenden Druckfehler fast unbrauchbar. Noch andere haben die Sache so populär behandelt, als trügen sie Bedenken, dem Leser einige Geistesanstrengung anzusinnen, und entwürdigen dadurch diesen Theil der Geometrie zu einem gedankenlosen Zeichnen.

Durch diese Betrachtungen stellt sich nun der Gesichtspunkt fest, unter dem ich das Bedürfniß und die Anlage der vorliegenden Schrift beurtheilt wünsche.

Man sieht zugleich daraus, daß ich nicht will sie als Bereicherung einer Wissenschaft angesehen wissen, deren Ausdehnung schon mit den Räumen ziemlich im Einklang ist, in denen sie sich bewegt; sondern nur als ein bequemes Hülfsbuch beim Lehren und beim Selbststudium, sofern sie

dem Lehrer freiere Auswahl, Erleichterung bei gewöhnlich überhäuften Berufsgeschäften, dem Selbststudirenden ein reiches Feld zur Uebung, zu eigener Prüfung und zu Stärkung seines geistigen Wissens bietet. Für den Anfänger, der das anmaßende „vollständig" auf dem Titel vermissen möchte, und nur für ihn, möchte vielleicht zu bemerken sein, daß es bei den vielfachen Variationen und Combinationen, welche die Elementarsätze zu solchen Aufgaben eingehen, Unmöglichkeit verlangen heißt, eine Sammlung dieser Art vollständig zu liefern, da es schon unmöglich wird alle denkbaren Fälle mancher Aufgabe vorzuführen, wollte man auch nicht rechnen, daß, bei dem riesenhaft vorschreitenden Gange der Wissenschaften, auch die Mathematik täglich mehr Edelreiser auf die ältern Zweige pfropft. Ich begnüge mich, wenn dieser Sammlung die Anerkennung zu Theil wird, daß sie eine der reichhaltigsten und gut geordnetsten sei; mache jedoch den Benutzenden auf die Vortheile aufmerksam, die sich für ihn aus dem Aufsuchen aller Fälle ergeben, welche in Bezug auf Bestimmtheit und Möglichkeit einer Aufgabe stattfinden.

Nahm ich also an, daß der Schüler die elementaren Sätze vom Anfang bis Ende völlig inne habe, daß er deren locale Anwendung leicht zu treffen wisse, und also das Obwalten von dem oder jenem Satze bald erkenne; so hob sich damit auch die Nothwendigkeit auf, die Folge der Aufgaben dem Faden irgend eines Lehrbuches anzupassen.

So natürlich diese Folge auch auf dem ersten Blick scheinen möchte, so hielten mich von ihrer Wahl, außer der schon erwähnten, noch andere Bedenklichkeiten ab.

Jeder Schriftsteller geht gewöhnlich seinen eigenthümlichen Gang und keiner, den Altvater Euklid nicht ausgenommen, gilt jetzt als allgemeine Autorität. Es würde daher die

Wahl des Lehrbuchs nicht nur schwer gewesen sein, sondern es würde sich auch etwas Zerissenes, Zusammengewürfeltes gebildet haben; weil viele Auflösungen durch Sätze herbeigeführt werden müssen, die, ihrer systematischen Rangordnung nach, weit auseinander liegen und eine solche Anordnung immer noch ohne sichern Anhaltpunkt bleibt.

Dies Alles würde sich noch unangenehmer herausgestellt haben beim Ordnen vom Leichtern zum Schwerern, vom Einfachern zum Zusammengesetztern. Dann wäre eine Uebersicht und das Auffinden nach dem momentanen Bedürfniß unmöglich geworden und wie unsicher erst die Rangirung selbst, da dem Einen die Lösung schwer wird, dem andern jene; je nachdem eine glückliche Constellation über die Entwickelung einer für schwer gehaltenen Aufgabe entscheidet, indeß eine ziemlich einfachere oft weit abgelegen und gelehrt gesucht wird.

Aus diesen Gründen habe ich die äußere Formbildung zur Norm gewählt und glaube damit folgende Vortheile erlangt zu haben:

das Ganze erhält einen mehr geordneten Zusammenhang, der durch die, sich natürlich und gerundet bildenden, Abtheilungen nicht nur von selbst die Zweckmäßigkeit der Anordnung beweiset; sondern auch

den Lehrer in den Stand setzt, passende Aufgaben bequem auszuwählen, im Fall er sie beim Fortschreiten des Unterrichts benutzen will, und

dabei leicht nachkommen läßt, ob eine, vielleicht anderswo aufgefundene, Aufgabe schon aufgenommen ist.

Ich kann hier nicht als Mängel anrechnen, daß in einzelnen Fällen bei frühern Aufgaben auf spätere berufen werden mußte und daß Aufgaben, welche nahe Verwandschaft haben, getrennt worden sind.

Um aber des Hinweisens auf ein Lehrbuch oder des wiederholten Aussprechens der Sätze überhoben zu sein, mußte ich eine Auswahl derjenigen, die auf die Auflösungen und Beweise unmittelbar Bezug haben, aufstellen.

Diesem Zweck am einfachsten und kürzesten zu genügen, und da die angegebenen Beweise meistens nur als Andeutungen betrachtet werden müssen, die dem Benutzer freien Spielraum lassen und ihn selbst nöthigen sollen, sie gehörig auszuarbeiten: konnte ich die streng systematische Verbindung dieser Sätze dem Bedürfniß unterordnen und Grundsätze, Lehr- und Zusätze und Erklärungen ohne Weiteres zusammenreihen.

Man findet darum auch mehrere Sätze über Polaren, Aehnlichkeitspunkte und Linien, Potenz und dergl. aufgenommen, die zwar unter dieser Form noch nicht das volle Bürgerrecht in der Elementargeometrie erlangt haben, jedoch eine Fülle von Folgerungen, Beziehungen und Aufgaben von ungemeinem Interesse in sich tragen.

Verschiedene solcher Aufgaben sind aus Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik entlehnt und mit ihren Auflösungen hier beigefügt worden. Dem Leser muß aber anheim gestellt werden, das System der beziehlichen Sätze dort im Zusammenhange zu studiren oder die Ableitungen und Beweise aus den Elementarsätzen vom Kreise, den dabei vorkommenden Linien, Berührungen u. a. m., auf denen jenes System ursprünglich beruht, zu entwickeln.

Unter den Aufgaben sind einige, deren Auflösungen nur annähernde Resultate geben, die aber zuweilen praktisch benutzt werden können. An einigen andern kann man sehen, auf welchem Wege man von jeher Auflösung von Problemen durch Construction gesucht hat, die bis jetzt die Analysis nur annähernd gab; dahin gehört die Aufgabe 223,

die Rectification (das berüchtigte Problem der Quadratur) des Kreises.

Endlich enthält ein Anhang Aufgaben vom Größten und Kleinsten. Die Bestimmung größter oder kleinster Werthe kann nur in wenigen Fällen durch Construction erlangt werden; daher entschuldige man, wenn ich diese kleine Gesellschaft durch einige Aufgaben vermehrt habe, wo jene Werthe durch Differentiale bestimmt worden sind.

Wenn ich aber diejenigen Constructionen hier gar nicht berührt habe, die durch Kegelschnitte oder andere transcendente Curven gelöst werden können und die, welche auf mehrerlei Ebenen Bezug nehmen: so geschah ersteres darum, daß ich die Kegelschnitte und andere Curven überhaupt einer andern Sammlung vorbehalten wollte, die, mehr das materielle Interesse des Technikers berührend, sich an die vorliegende anschließen soll, ohne doch integrirender Theil von ihr zu sein; letzteres aber, weil in ihnen die Lehre der verschiedenen Projectionsarten liegt, die als abgesonderte Disciplin angesehen und behandelt werden muß.

Noch bemerke, daß ich durch selbst übernommenen Stich der Kupferplatten den Mängeln möglichst vorzubeugen gesucht habe, die sich gewöhnlich einschleichen, wenn der Stecher nicht selbst Mathematiker ist.

Der erfahrene Lehrer kennt die vielseitige Benutzung der geometrischen Aufgaben für die Uebung und wird sie leicht der gewählten Lehrweise, den Fähigkeiten und Vorkenntnissen der Schüler anzupassen wissen. Für diejenigen, die sie ohne Hülfe eines Lehrers brauchen wollen, werden einige Worte über das zweckmäßigste Verfahren dabei von Nutzen sein.

Eine Aufgabe ist rein geometrisch gelöst, wenn ihre Forderungen durch Construction mit Zirkel und Lineal allein, also durch Kreise und Gerade, ohne Gebrauch anderer Instrumente, wie des Transporteurs, des Proportionalzirkels, und ohne alles Probiren erfüllt worden sind.

Anmerkung. Diese Definition hört auf passend zu sein, sobald man außer dem Kreise, nach dem Beispiele einiger Mathematiker, noch andere Curven hinzuzieht. Alle übrige Curven können nur annähernd richtig gezeichnet werden, wenn man auch bei der Construction Abscissen oder Ordinaten um einen noch so kleinen Theil wachsen oder abnehmen läßt. Auch müssen sie meistens aus ihrer Gleichung und durch Gebrauch eines Maaßstabes entworfen werden. Man hat dann wenigstens noch strenger, als bei andern Constructionen zu beachten, daß in jeder solcher Zeichnung nur ein Bild gegeben ist, an dem sich die mathematischen Begriffe festhalten sollen.

Bevor der Anfänger einigen Ueberblick und die gehörige Uebung im schnellen Auffinden der geometrischen Beziehungen und im Errathen der, zur Auflösung zu ziehenden Hülfssätze erhält; thut er wohl die Figur zu zeichnen, als sei die Aufgabe gelöst, so daß er die Forderung mit ihren untergelegten Voraussetzungen in sie einträgt. Nun stelle er Betrachtungen an, welcher Satz vielleicht in den gegenseitigen Beziehungen der vorhandenen Linien und Winkel liege, aus dem sich das Resultat ergeben könnte.

Ist kein solcher zu entdecken, so füge er andere Linien und Winkel bei, jedoch immer nur solche, die sich der Figur noch am einfachsten und natürlichsten ergeben, und forsche weiter nach beziehlichen Sätzen, bis er einen oder den andern

entdeckt, von dem aus er weiter schließen kann. Hat er nur erst einen gefunden, an den sich andere anknüpfen, so wird es bei einigem Scharfsinn leicht sein auf einen ersten zurückzukommen, von dem die Auflösung ausgeht und zuletzt alles zu beseitigen, was der Construction nicht unmittelbar angehört.

Glaubt er nun den rechten Gang gefunden zu haben, so versuche er ihn an einer Figur von ganz abweichenden Verhältnissen. Hier wird sich zuweilen zeigen, daß die erste Figur irgend eine zufällige, vielleicht symetrische Bildung hatte; so daß sich in ihr Beziehungen, z. B. normale, parallele Richtungen, Gleichheit von Winkeln oder sonst Verhältnisse vorfanden, die nothwendige Theile des Schlußgebäudes schienen, die sich aber der zweiten Figur versagen oder doch nur wirklich stattfinden würden, wenn eine neue, nicht genannte Voraussetzung hinzukäme; daß also die Construction nur für einen speciellen Fall, nicht allgemein, gültig war.

Ein zweckmäßiges Mittel, die Richtigkeit einer gefundenen Auflösung zu prüfen, ist auch das, daß man die Schlüsse, wodurch das Resultat hervorgegangen zu sein scheint, noch in umgekehrter Folge anwendet und versucht, ob sie sich auch dann bewähren.

Wer Belehrung mit kräftigem Willen sucht, wird unerinnert die Auflösungen und auch die Figuren des Buchs so lange als nicht vorhanden annehmen, bis sich ihm gar keine Conjectur mehr darbieten will; und sie immer nur als letzte Zuflucht benutzen.

Es würde solchergestalt die Untersuchung von Aufgabe 272, als Beispiel, in nachstehender Gedankenreihe anzustellen sein; wenn zuvor die Figur so vorbereitet worden ist, daß man einen Kreis c′ und außerhalb eine Gerade bt in

beliebiger Richtung, als gegeben, gezeichnet hat. Da nun die Aufgabe als gelöst angenommen werden soll, so hat man noch den gesuchten Kreis c zu beschreiben, der durch die Endpunkte b, t geht und den Kreis c′ in einem Punkte (m) berührt.

Wäre m bestimmt, so würde sich dieser Kreis unmittelbar, nach Aufgabe 227, ergeben; so muß er aber vorläufig versuchsweise gezogen werden, indem man den Satz 83 zu Hülfe nimmt, nach welchem sein Mittelpunkt c die Normale auf Mitten der Sehne bt zum geometrischen Ort hat. Daß inzwischen von der Bestimmung des Punktes m die Auflösung abhängig ist, leuchtet vor.

Der Berührungspunkt (m) liegt, nach 115 c, immer auf der Centrale cc′, und eine Normale auf dieser in m ist, nach 77 und 115 d, Tangente beider Kreise.

Denkt man diese unbestimmte Tangente und die Sehne bt verlängert, so werden sie entweder parallel laufen oder sich in irgend einem Punkte oberhalb oder unterhalb m schneiden. Das erstere kann nur eintreten, wenn die Sehne auf der Centrale normal, oder die Normale cd zugleich Richtung der Centrale ist, und dann ist in dem Durchschnitt m der Berührungspunkt und, nach Aufgabe 227, der Kreis c selbst gefunden. Stößt man auf diesen speciellen Fall, so verändere man die Figur dahin, daß die Sehne bt irgend eine Neigung gegen die Centrale erhalte. Nun werden sich bt und die gemeinschaftliche Tangente mp in irgend einem Punkte (p) schneiden der sich zwar vorläufig in der Zeichnung darstellt, jedoch noch nicht durch Schlußfolgerung bestimmt.

Man sieht aber schon, daß der Satz 94 Anwendung zuläßt. Nach ihm ist

$$pm^2 = pt \cdot pb.$$

*

Dieser Satz muß sich aber auch auf jede beliebige Secante (pf) des gegebenen Kreises c′ anwenden lassen, so daß auch

$$pm_1 = pf \cdot po$$

sein wird. Da nun hieraus

$$pt \cdot pb = pf \cdot po$$

folgt, so verschwinden die gemeinschaftliche Tangente (pm) und der Berührungspunkt (m) vorläufig als Bestimmungsstücke und treten dafür die beiden Secanten pf und pt ein; welche also wohl hinreichen werden, den unentbehrlichen Punkt p auf der Verlängerung bt und dann mit seiner Hülfe die Tangente und folglich den Berührungspunt (m) zu bestimmen.

Die Secante pf war jedoch ganz willkührlich gelegt, und eine Veränderung ihrer Richtung wird auch einen andern Durchschnitt p bringen. Es fällt aber in die Augen, daß in

$$pt \cdot pb = pf \cdot po$$

der Satz 93 verborgen liegt und daß sich nach ihm die Abschnitte of und bt der Secanten auf einerlei Kreis beziehen lassen. Dieser problematische Kreis (c″) muß wohl ein Wesentliches der Auflösung sein? Er wird die Punkte b, t mit dem Kreis c gemeinschaftlich und da, wie in Aufgabe 227, drei Punkte zu Bestimmung eines Kreises hinlänglich sind, auch noch einen dritten und zwar auf der Kreislinie c′ haben, durch den die andere Secante geht. Es fragt sich weiter, ob jeder Kreis c″ und also auch jeder Punkt (o) die Auflösung herbeiführen wird.

Dieses entscheidet sich bejahend, weil dann, nach 114 a, jedesmal noch ein vierter Punkt f und durch die Verlängerung of immer auch irgend ein Punkt (p) der Richtung bt geschnitten wird, da immer

$$pt : pb = pf . po$$

seiu muß; wenn nicht beide Secanten eine unter sich und daher auch mit der Tangente parallele Lage haben, wodurch sämmtliche Factoren unendlich groß werden und sich der erste, specielle Fall ergiebt.

Ist nun durch die vier Durchschnittspunkte eines Kreises c″ der Convergenzpunkt p festgestellt, so läßt sich durch ihn, nach Aufgabe 249, eine Tangente an den Kreis c legen, der Berührungspunkt m bestimmen und der gesuchte Kreis c durch b, t und m beschreiben.

Benutzt man die Sätze 98, 99, 120 und folgende, so gestaltet sich die Auflösung noch eleganter.

Eine solche analytische Vorbereitung begründet dann die Operation ohne Weiteres; der synthetische Beweis geht Hand in Hand mit ihr und bedarf nur einer mehr syllogisten Form. Dieser ist am gründlichsten und gemeiniglich auch am elegantesten, wenn er die Richtigkeit des Resultats, als nothwendige Folge des Verfahrens im Einzelnen, nachweist. In allen Fällen, wo er direkt geführt werden kann, ziehe man diesen dem apagogischen vor und lasse letztern nur als nothwendiges Uebel zu.

Die Aufgaben lassen sich aber, zweckmäßig ausgewählt, auch mit Erfolg als Vorübungen des Linearzeichnens benutzen, sobald nur der Schüler in den Vorhof der Geometrie eingeführt ist. Ich wende sie häufig an, um an den Gebrauch der Instrumente und daran zu gewöhnen, Figuren nach Text zu entwerfen. Es bedarf kaum der Beharrlichkeit des Lehrers ungenaue Zeichnungen zurückzuweisen, da die meisten Constructionen beim Mangel an Schärfe im Zeichnen schon selbst das Resultat versagen.

Noch bemerke ich beiläufig, daß die im Text aufgeführten Nummern, wenn sie allein, ohne das Wort „Auf-

gabe" stehen, sich immer auf die dem Buche vorgedruckten Elementarsätze beziehen.

Nachdem ich mich über den Zweck, die Anordnung und Benutzung dieser Sammlung ausgesprochen habe: erkläre ich offen, daß ich keineswegs die stolze Ueberzeugung hege, es sei mir vollkommen gelungen, das Werk frei von Mängeln abzufassen. Ich werde deshalb dankbar erkennen und gelegentlich zu verbessern suchen, was als solche bemerkt werden möchte. Auch betrachte ich diese Schrift nicht als Sprosse der Jacobsleiter zur höhern Wissenschaft, wohl aber als Band zwischen reinen theoretischen und praktischen Werken; nehme auch nur das bescheidene Verdienst des mühevollen Sammelns und Ordnens, und nur von einem Theil des Inhalts das Recht des Eigenthums in Anspruch. Wird es dann noch einer Entschuldigung bedürfen, wenn ich manches fremde Erzeugniß herbeigezogen habe, ohne die Quelle oder den ersten Erfinder zu nennen, den ich in den meisten Fällen nicht einmal mit Sicherheit zu nennen wußte? Der Name geht unter in der Wissenschaft, und aus dem zu schöpfen, was gemeingeistiges Eigenthum geworden ist, verbietet kein Recht.

Naumburg a. d. S. im Juni 1838.

A. W. Hertel.

Inhalt.

	Seite.
Einleitung. Sätze aus der ebenen Geometrie	1
Erster Abschnitt. Aufgaben die geraden Linien und ihre einfachen Verbindungen betreffend	13
Zweiter Abschnitt. Aufgaben, die Theilung der Linien und Winkel, und die Proportionalen betreffend	20
Dritter Abschnitt. Gemischte Aufgaben, Linien und Winkel betreffend	34
Vierter Abschnitt. Aufgaben, die Dreiecke in ihren Linienbeziehungen betreffend	47
A. Dreiecke im Allgemeinen	47
B. Rechtwinkliche Dreiecke	48
C. Gleichseitige und gleichschenkliche Dreiecke	57
D. Ungleichseitige Dreiecke	65
Fünfter Abschnitt. Aufgaben, Parallelogramme und andere Vierecke, ihren Linienbeziehungen nach, betreffend . .	94
A. Von den Quadraten insbesondre	94
B. Von andern Rechtecken und den übrigen Parallelogrammen	98
C. Von den Vierecken, welche nicht Parallelogramme sind.	103
Sechster Abschnitt. Aufgaben, Kreise und ihre Beziehungen betreffend, die sie unter sich und mit Geraden eingehen.	110
Siebenter Abschnitt. Aufgaben, Figuren betreffend, welche in oder um Kreise beschrieben sind	148
Achter Abschnitt. Aufgaben, die Construction von Figuren in Bezug auf ihr Flächenverhältniß betreffend	165

Neunter Abschnitt. Aufgaben, die Verwandlung von Figuren betreffend 182
Zehnter Abschnitt. Aufgaben, die Theilung von Figuren betreffend 194
Erster Anhang. Aufgaben, die Bestimmung von größten und kleinsten Werthen betreffend 219
Zweiter Anhang. Aufgaben, ohne beigefügte Construction. 243

Einleitung.

Sätze der ebenen Geometrie, auf welche die Constructionen sich gründen.

1. Gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, fallen ihrer Richtung nach zusammen.

2. Ist eine Gerade parallel mit der einen von zwei parallelen Linien, so ist sie es auch mit der andern.

3. Sind zwei oder mehrere Gerade einzeln genommen parallel der einen von ihnen, so sind sie es auch unter sich.

4. Winkel, die sich decken können, sind gleich.

5. Daher sind auch Winkel gleich, wenn die Schenkel des einen, einzeln genommen, parallel sind den Schenkeln des andern, und beide Paare nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung vom Scheitel ausgehen.

6. Alle gestreckten Winkel sind gleich; daher sind auch ihre Hälften, oder alle rechten Winkel gleich.

7. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich einem gestreckten Winkel, gleich 2 R.

8. Daher ist jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln gleich einem rechten, und die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bilden einen gestreckten Winkel.

9. Alle Winkel in einem Punkte, deren äußerste Schenkel eine Gerade bilden, betragen zusammen genommen zwei rechte.

10. Daher ist die Summe aller Winkel um einen Punkt, deren äußerste Schenkel zusammenfallen, gleich 4 R.

11. Scheitelwinkel sind gleich.

12. Bei parallelen Linien sind die Gegenwinkel gleich; und sind zwei Gegenwinkel gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.

13. Bei parallelen Linien sind die Wechselwinkel gleich; und sind bei zwei geschnittenen Linien zwei Wechselwinkel gleich, so sind die Linien parallel.

14. Bei parallelen Linien ist die Summe je zwei äußerer oder innerer Winkel gleich 2 R; und sind bei zwei geschnittenen Linien jene Summen gleich 2 R, so sind die Linien parallel.

15. Sind zwei oder mehrere Parallelen, einzeln genommen, parallel einer Geraden außer ihnen, so sind sie parallel unter sich.

15 a. Sind zwei oder mehrere Linien normal einer außer ihnen, so sind sie parallel unter sich.

16. Sind zwei oder mehrere Linien parallel, und ist eine außer ihnen normal auf der einen, so ist sie es auch den andern.

17. Alle Normalen, die aus einem Punkte auf eine Linie gefällt werden, fallen in einander. Eben so alle Normalen, die man in einem Punkte einer Linie errichtet.

18. Zwei Parallelen haben in allen Punkten gleichen normalen Abstand.

19. Sind zwei Normalen, die auf einer Geraden stehen, gleich, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte parallel der Geraden.

20. Die Stücke zweier Parallelen, die zwischen andern Parallelen liegen, sind gleich.

21. Jeder äußere Winkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden gegenliegenden innern Winkel.

22. Daher ist jeder äußere Winkel eines Dreiecks stets größer als einer der gegenliegenden innern.

23. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich einem gestreckten Winkel, gleich 2 R.

24. In jedem Dreieck steht der größern Seite der größere Winkel gegenüber; und umgekehrt, steht immer dem größern Winkel eines Dreiecks die größere Seite gegenüber.

25. Sind zwei n ecke congruent, so sind die Seiten und die Winkel des einen einzeln gleich den Seiten und Winkeln des andern, in gleicher Folge genommen.

26. In congruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; und umgekehrt.

27. Dreiecke sind congruent, wenn sie beziehungsweise

a) zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel,
b) zwei Winkel und die zwischenliegende Seite,
c) alle drei Seiten

gleich haben;

d) wenn sie zwei Seiten und einen nicht eingeschlossenen Winkel gleich haben, die Summe der Winkel aber,

welche den andern gleichen Seiten gegenliegen, größer oder kleiner ist als 2 R.

28. Daher sind Dreiecke auch congruent, wenn sie zwei Seiten gleich haben, und einen gleichen Winkel, welcher der größern von diesen Seiten gegenliegt.

29. In einem gleichschenklichen Dreieck sind die Winkel an der ungleichen Seite gleich; und sind die Winkel an einer Dreieckseite gleich, so ist das Dreieck ein gleichschenkliches.

30. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite.

31. Zieht man in einem Dreieck eine Transversale aus einer Spitze nach der Gegenseite, und es finden von folgenden Bedingungen:

a) Gleichheit der Seiten, welche den getheilten Winkel einschließen,
b) Gleichheit der Stücke der Gegenseite,
c) Gleichheit der Winkel, welche die Tranversale mit der Gegenseite bildet, und
d) Gleichheit der Theile des Winkels, den die Transversale theilt,

je zwei statt, so finden auch die beiden übrigen statt.

32. Daher geht eine Normale, welche man in der Mitte der ungleichen Seite eines Dreiecks errichtet, durch die gegenliegende Spitze.

33. Wenn man auf derselben Linie zwei gleichschenkliche Dreiecke bildet und die beiden gegenliegenden Spitzen verbindet, so geht diese Richtung immer durch die Mitte jener Linie, und ist ihr normal.

34. Die Summe aller innern Winkel eines n ecks ist gleich $2 (n - 2)$ R.

35. Sind in einem Viereck die Gegenseiten paarweise parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

36. Alle Parallelogramme haben folgende Eigenschaften:

a) die Gegenseiten sind gleich;
b) die gegenliegenden Winkel sind gleich;
c) die Summe zweier, an derselben Seite liegenden Winkel ist gleich 2 R;
d) jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke;
e) die Diagonalen halbiren sich gegenseitig.

37. In gleichwinklichen Parallelogrammen sind die Diagonalen gleich.

38. In gleichseitigen Parallelogrammen sind die Diagonalen normal zu einander.

Fig. 1. 39. Wenn man auf der Diagonale eines Quadrats von einem ihrer Endpunkte c aus ein Stück ce, gleich der Quadratseite, abschneidet, im Ende e dieses Stücks eine Normale ef errichtet; so ist diese Normale gleich der Differenz der Diagonal eund Quadratseite, und auch gleich dem kleinern Stück df der Quadratsseite: nemlich ec = ac — ad = df.

40. Parallelogramme, die gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind gleichflächig.

41. Dreiecke, die gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind gleichflächig.

42. Daher sind Parallelogramme, oder auch Dreiecke gleichflächig, wenn sie gleiche Grundlinie haben und zwischen denselben Parallelen liegen.

43. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, mit welchem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

44. Ein Dreieck und ein Parallelogramm sind gleichflächig, wenn

a) die Grundlinien gleich, die Höhe des Dreiecks aber das Doppelte der Höhe des Parallelogramms ist,

b) die Höhen gleich sind, die Grundlinie des Dreiecks aber das Doppelte von der des Parallelogramms ist.

45. In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen an der Diagonale gleichflächig.

Fig. 2. 46. Ist ab′ parallel bd und auch ac′ parallel cd, so sind die Dreiecke abc und db′c′ gleichflächig.

47. In jedem rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Catheten.

48. In jedem Dreieck ist das Quadrat der Seite, die einem spitzen Winkel gegenliegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Rechteck, welches gebildet wird aus der einen dieser Seiten und der Projection der andern auf ihr.

49. In einem stumpfwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenliegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck, welches gebildet wird aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf ihr.

50. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich dem doppelten Quadrat der Verbindungslinie der Mitte der dritten Seite mit der gegenlie-

genden Spitze, vermehrt um das halbe Quadrat der dritten Seite.

51. Wenn die Schenkel eines Winkels von einer Anzahl Parallelen geschnitten werden, so sind die abgeschnittenen Stücke des einen Schenkels verhältnißgleich den Stücken des andern Schenkels in gleicher Ordnung genommen. Und sind die Stücke des einen Schenkels unter sich gleich, so sind es auch die Stücke des andern Schenkels.

52. Wenn von folgenden drei Bestimmungen:

a) Parallelismus zweier Linien,
b) Proportionalität der Theile, in welche diese beiden Linien nach einerlei Richtung getheilt gedacht werden,
c) Zusammentreffen der geraden Verbindungslinien zusammengehöriger Theilpunkte in einem und demselben Durchschnittspunkte,

je zwei vorhanden sind, so ist es stets auch die dritte.

53. Theilt man eine Gerade ab in zwei gleiche Theile ad = db, und verlängert sie beliebig um bc, so ist allemal $ac_q + bc_q = 2\,(db_q + dc_q)$.

54. Eine Linie heißt nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt, wenn die ganze Linie sich zu dem größern Stück verhält, wie dieses größere Stück zum kleinern.

55. Wenn eine Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß geschnitten ist, und man verlängert sie um die Länge des größern Abschnittes, so ist die verlängerte Linie ebenfalls nach diesem Verhältniß geschnitten; und zwar bildet die ursprüngliche Linie den größern Abschnitt.

56. Sind die Linien bd und ce parallel, und verhält sich ac : ab = ce : bd, so liegen die drei Punkte a, d, e in einerlei Richtung. Fig. 3 u. 4.

57. Zieht man in einem Dreieck eine oder mehrere Linien parallel mit einer der Seiten, so sind die abgeschnittenen Theile der andern Seiten proportionirt, und jedes so abgeschnittene Dreieck ist dem ganzen ähnlich.

58. Dreiecke sind ähnlich:

a) wenn zwei Seiten des einen sich verhalten wie zwei Seiten des andern, und wenn die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind;
b) wenn zwei Winkel beziehlich gleich sind;
c) wenn die drei Seiten des einen sich verhalten wie die drei Seiten des andern;
d) wenn zwei Seiten des einen sich verhalten wie zwei Seiten des andern, wenn die Winkel gleich sind, die den einen dieser Seiten gegenliegen, und wenn die

Summe der Winkel, die den andern genannten Seiten gegenliegen, größer oder kleiner ist als 2 R.

59. Daher sind in ähnlichen Dreiecken die drei Winkel beziehlich gleich und die drei Seiten proportionirt.

60. Bei ähnlichen Dreiecken verhalten sich gleichliegende Grundlinien wie die zugehörigen Höhen; und die aus den Spitzen gleicher Winkel gezogenen Normalen theilen die Seiten in proportionirte Stücke.

61. Fällt man in einem rechtwinklichen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels eine Normale auf die Hypotenuse, so ist erstere mittleres Proportionalglied zwischen den Projectionen der Catheten.

62. Jede Cathete ist mittleres Proportionalglied zu ihrer Projection auf der Hypotenuse und der Hypotenuse selbst.

63. Halbirt man in einem gleichschenklichen Dreieck einen Winkel an der ungleichen Seite und diese Halbirungslinie theilt die Gegenseite so, daß dieselbe nach dem äußern und mittlern Verhältniß geschnitten wird, so ist

a) jeder Winkel an der ungleichen Seite doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze;

b) jeder dieser Winkel ist gleich $\frac{4}{5}$ R; also der dritte $\frac{2}{5}$ R und Mittelpunktswinkel eines regulären Zehnecks;

c) das größere Stück der geschnittenen Seite ist der Grundlinie gleich;

d) das kleinere Dreieck an der ungleichen Seite ist dem ganzen Dreieck ähnlich.

64. Parallelogramme und Dreiecke

die gleiche {Grundlinien / Höhen} haben

verhalten sich wie ihre {Höhen / Grundlinien.

65. Parallelogramme und Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie und Höhe.

66. Parallelogramme und Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen.

67. Sind Parallelogramme oder Dreiecke gleichflächig, und haben einen gleichen Winkel, so verhalten sich die ihn einschließenden Seiten umgekehrt wie eben diese Seiten des andern. Dieser Satz hat auch umgekehrt seine Gültigkeit.

68. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten, oder wie die Quadrate gleichliegender Höhen.

69. Aehnliche n ecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonalen.

70. Aehnliche n ecke lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen.

71. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

72. Die drei Transversalen aus den Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten schneiden sich in einem Punkte. Jede dieser Transversalen ist in dem Durchschnittspunkte so getheilt, daß das Stück an der Spitze das Doppelte des andern ist.

73. Die Winkelhalbirenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, welcher von den Seiten gleichen Abstand hat.

74. Die drei Linien, welche auf den Mitten der Seiten normal stehen, schneiden sich in einem Punkte, und dieser ist von den Spitzen des Dreiecks gleichweit entfernt.

75. Die drei Linien, von denen die eine einen Winkel des Dreiecks halbirt, die andern aber die äußern Winkel halbiren, welche nicht Nebenwinkel zu jenem sind, schneiden sich in einem Punkte und dieser ist von den Seiten des Dreiecks gleichweit entfernt.

75 a. Die Rechtecke, die man aus den Stücken bildet, worin jede Höhe eines Dreiecks die andere theilt, sind gleichflächig.

76. Alle Radien eines Kreises sind gleich; daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises gleich.

77. Jede Normale in dem, auf der Peripherie liegenden Endpunkt eines Radius ist Tangente des Kreises für diesen Punkt.

78. Der nach dem Berührungspunkt gezogene Radius steht immer normal auf der Tangente; daher geht jede Linie, die im Berührungspunkte einer Tangente normal dieser ist, durch den Mittelpunkt des Kreises.

79. In gleichen Kreisen gehören zu gleichen Mittelpunktswinkeln auch gleiche Bogen und gleiche Sehnen; und so auch umgekehrt.

80. In gleichen Kreisen gehören zu gleichen Peripheriewinkeln auch gleiche Bogen und gleiche Sehnen. Dieses gilt auch umgekehrt.

81. Daher ist in gleichen Kreisen ein Mittelpunctswinkel das n fache eines andern, wenn der Bogen, worauf er steht, das n fache des Bogens von dem andern Winkel ist. Dasselbe gilt auch von den Peripheriewinkeln.

82. Eine Normale aus dem Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne gefällt, halbirt leztere, den zugehörigen Bogen und das Kreissegment.

83. Umgekehrt geht jede Normale, in der Mitte einer Sehne errichtet, durch den Mittelpunkt des Kreises.

84. Sind zwei Sehnen eines Kreises gleich, so liegen sie gleichweit vom Mittelpunkt ab; und umgekehrt.

85. Schneiden sich zwei Sehnen rechtwinklich und man zieht die vier Halbmesser nach ihren Endpunkten, so sind die gegenliegenden Winkel am Mittelpunkt Supplementswinkel.

86. Sind zwei Sehnen parallel, so sind die Bogen gleich die zwischen ihnen liegen.

87. Von einem beliebigen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises lassen sich immer zwei, nicht mehr Linien von gleicher Länge nach der Peripherie ziehen. Sie liegen stets auf verschiedenen Seiten der, durch jenen Punkt gelegten, diametralen Richtung und bilden mit ihr gleiche Winkel.

88. Ein Winkel am Mittelpunkt ist das Doppelte eines jeden Peripheriewinkels, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.

89. Steht ein Peripheriewinkel auf den Endpunkten eines Durchmessers, so ist er gleich R.

90. Der Winkel, welchen eine Tangente mit einer Sehne am Berührungspunkte bildet, ist gleich jedem Peripheriewinkel, der auf dem Bogen steht, welcher in der erstern Winkelebene liegt.

91. Jede Sehne, die von einem Endpunkt eines Durchmessers ausgeht, ist mittlere Proportionale zu ihrer Projection auf dem Durchmesser und dem Durchmesser selbst.

92. Schneiden sich zwei Sehnen, so ist immer das Rechteck aus den Abschnitten der einen gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der andern.

93. Schneiden sich zwei Secanten, so sind die Rechtecke, welche man aus jeder Secante und ihrem außerhalb liegenden Abschnitte bildet, gleichflächig.

94. Schneiden sich eine Tangente und eine Secante, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der Secante und ihrem äußern Abschnitt.

95. Schneiden sich zwei Tangenten, so sind die Stücke gleich, die zwischen ihrem Durchschnitt und den Berührungspunkten liegen.

96. Halbirt eine Linie den Winkel, welchen zwei Tangenten bilden, so geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises.

97. Zieht man von einem beliebigen Punkt außerhalb eines Kreises zwei Tangenten und fällt auf die eine aus dem Berührungspunkte der andern eine Normale, so ist das Stück derselben, zwischen dem Berührungspunkt und der Geraden, welche den genannten Punkt außerhalb mit dem Mittelpunkt verbindet, gleich dem Radius.

98. Wenn zwei Secanten sich in einem Punkte innerhalb oder außerhalb eines Kreises schneiden, so haben alle Rechtecke, die aus den Abschnitten jeder derselben gebildet werden, einen constanten Flächeninhalt. Diesen Flächenraum nennt man Potenz jenes Punktes für gedachten Kreis; und zwar die innere oder äußere Potenz, je nachdem der Durchschnittspunkt innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.

99. Das Maaß für die Größe jeder äußern Potenz ist das Quadrat der Tangente, welche man von dem zugehörigen Punkte nach dem Kreise zieht.

100. Jedes Dreieck liegt in einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Durchschnitt der Transversalen liegt, die man aus den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten zieht.

101. Jedes Dreieck liegt um einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt der Winkelhalbirenden ist.

102. Im regulären n eck sind alle Seiten und alle Winkel gleich; daher ist jeder Winkel eines regulären n ecks gleich $2 \cdot \frac{n-2}{n} R$.

103. Jedes reguläre n eck läßt sich durch Linien aus dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises nach den Ecken in n congruente Dreiecke zerlegen. Der Winkel jedes solchen Dreiecks am Mittelpunkte des Kreises ist gleich $\frac{4}{n} R$, und jeder der andern Dreieckswinkel gleich $\frac{n-2}{n} \cdot R$.

104. Die Seite eines regulären Sechsecks ist gleich dem Radius des umschriebenen Kreises.

105. Sind in einem Viereck die Summen der gegenliegenden Winkel paarweise gleich 2 R, so läßt sich um das Viereck ein Kreis legen, welcher durch die Ecken geht.

106. Sind die Summen der Gegenseiten eines Vierecks gleich, so läßt sich in dasselbe ein Kreis legen.

107. Schneiden die Diagonalen eines Vierecks sich nach N. 93, so läßt sich durch die Ecken ein Kreis legen.

108. Das Quadrat der Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Driecks ist dreimal so groß als das Quadrat des Halbmessers; oder gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und der Höhe des Dreiecks.

109. Theilt man den Halbmesser nach dem äußern und mittlern Verhältniß, so ist das größere Stück die Seite des eingeschriebenen Zehnecks.

110. Das Quadrat der Seite eines regulären Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate des Radius und der Zehnecksseite.

111. Die Tangenten des umschriebenen Kreises eines n ecks, deren Berührungspunkte entweder die Ecken des n ecks oder die Halbirungspunkte der Bogen sind, die zwischen den Ecken liegen, bilden gehörig verlängert ein umschriebenes ähnliches n eck.

112. Hat man ein reguläres Vieleck von 2n Seiten und man zieht alle Diagonalen des niedrigsten Ranges, so entstehen zwei reguläre congruente Vielecke von n Seiten.

113. Sehnen, die ungleichen Kreisen angehören, verhalten sich, bei gleichen Mittelpunktswinkeln, wie die Radien.

114. Scheiden sich zwei Kreise, so

a) geschieht es immer nur in zwei Punkten;
b) steht die Verbindungslinie dieser Punkte normal auf der Centrale;
c) sind diese Punkte gleichweit von der Centrale entfernt;
d) ist die Centrale kleiner als die Summe ihrer Halbmesser und größer als deren Differenz.

115. Berühren sich zwei Kreise, so

a) haben die Peripherien nur einen Punkt gemein;
b) ist die Centrale gleich der Summe oder der Differenz der Halbmesser; je nachdem die Berührung eine äußere oder innere ist;
c) liegt der Berührungspunkt auf der Centrale oder auf deren Verlängerung;
d) haben beide Kreise eine gemeinschaftliche Tangente.

116. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder wie ihre Durchmesser.

117. Zwei Bogen ungleicher Kreise verhalten sich, wenn sie gleichen Mittelpunktswinkeln zugehören, wie ihre Peripherien oder wie ihre Radien.

118. Die Flächenräume ungleicher Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

119. Ist der Winkel, den zwei Tangenten in einem Durchschnittspunkte zweier Kreise bilden, ein rechter, so sagt man: die Kreise schneiden sich rechtwinklich.

120. Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise nennt man die beiden Punkte ihrer Centrale, in denen sich die Geraden schneiden, welche die Endpunkte paralleler Radien verbinden.

Liegen die beiden Radien auf einerlei Seite der Centrale, so ergiebt sich ein äußerer Aehnlichkeitspunkt; liegen sie auf verschiedenen Seiten der Centrale, so entsteht ein innerer Aehnlichkeitspunkt.

121. Für zwei Kreise giebt es nie mehr als zwei Aehnlichkeitspunkte.

122. Berühren sich zwei Kreise von außen, so ist dieser Berührungspunkt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt.

123. Jede Gerade, die durch den Aehnlichkeitspunkt geht, heißt Aehnlichkeitslinie zweier Kreise; und zwar hat man innere und äußere Aehnlichkeitslinien, je nachdem sie durch den innern oder äußern Aehnlichkeitspunkt gehen.

124. Schneidet eine Aehnlichkeitslinie zweier Kreise einen der Kreise, so schneidet sie auch den andern; berührt sie den einen, so berührt sie auch den andern; und liegt sie ganz außerhalb des einen, so liegt sie auch außerhalb des andern.

125. Zwei Parallelen aus den Mittelpunkten zweier Kreise, deren Endpunkte in einer Aehnlichkeitslinie liegen, verhalten sich stets wie die Radien der Kreise.

126. Liegen zwei Punkte auf derselben Seite eines der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise und in solcher Entfernung von ihm, daß das Rechteck aus diesen Entfernungen gleich ist der zu diesem Aehnlichkeitspunkte gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der Kreise, so heißen diese Punkte potenzhaltende, in Beziehung auf einen der Aehnlichkeitspunkte.

127. Jeder Kreis ist potenzhaltend in Beziehung auf den Aehnlichkeitspunkt zweier andern, wenn er durch zwei potenzhaltende Punkte geht.

128. Ein Kreis heißt Potenzkreis zweier andern, wenn er von einem ihrer Aehnlichkeitspunkte aus mit einem Radius beschrieben wird, dessen Quadrat das Maaß für die, diesem Aehnlichkeitspunkte zugehörige gemeinschaftliche Potenz dieser Kreise ist.

129. Der Halbmesser des äußern Potenzkreises ist also gleich der Tangente, die man von dem äußern Aehn-

lichkeitspunkte aus an einen der Kreise zieht, welcher die gegebenen rechtwinklich schneidet.

130. Der Halbmesser des **innern Potenzkreises** ist die halbe Mittelsehne, die man von dem innern Aehnlichkeitspunkte aus in einem der Kreise zieht, welcher die gegebenen rechtwinklich schneidet.

131. Zieht man durch einen der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise eine beliebige Gerade, welche beide Kreise schneidet, so hat das Rechteck aus den Abschnitten derselben, welche zwischen diesem Aehnlichkeitspunkte und zwei solchen Durchschnittspunkten mit den Kreisen liegen, zu denen keine parallelen Halbmesser gehören, einen constanten Flächeninhalt. Diese constanten Rechtecke nennt man: **gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise für ihren Aehnlichkeitspunkt.**

132. Berührt ein Kreis zwei andere gleichartig, so liegt der äußere Aehnlichkeitspunkt dieser letztern mit den Berührungspunkten in gerader Linie.

Constructionen

aus dem Gebiete der Elementargeometrie.

Erster Abschnitt.

Aufgaben die geraden Linien und ihre einfachen Verbindungen betreffend.

1. Von einem Punkt m aus eine Gerade zu ziehen, die gleich einer gegebenen Linie ab ist.

Auflösung. Beschreibe aus m mit einem Radius gleich ab einen Bogen op, und verbinde einen seiner Punkte (n) mit dem Mittelpunkte m. Fig. 5.

Beweis. Aus 76.

Anmerkung. Beim Zeichnen zieht man bekanntlich eine Gerade an der Kante eines Lineals.

Um zu prüfen, ob diese Kante selbst eine Gerade sei, ziehe man an ihr in der Lage A eine feine Linie, bringe dann das Lineal in die Lage A′, doch so, daß die benutzte Kante unmittelbar wieder an die gezogene Linie ab zu liegen kommt. Fallen in der zweiten Lage alle Punkte der Kante in die gezogene Linie der ersten Lage, so ist diese Kante richtig; wo nicht, so ist das Lineal unrichtig und zum Zeichnen untauglich. Fig. 6.

Beweis. Aus 1.

2. Eine gerade Linie zu verlängern.

Auflösung. Diese Aufgabe ist einfach zu lösen, sobald man das Lineal noch an einen hinlänglich großen Theil der gegebenen Linie anlegen kann. Es kann aber diese Linie selbst, oder auch das Lineal zu kurz sein, als daß man die Richtung auf diese Weise mit Sicherheit ziehen könnte. Man beschreibe dann aus einem Punkte der Linie z. B. aus dem Endpunkt a mit beliebigem Radius einen Bogen, schneide ihn aus einem andern Punkte der Linie z. B. aus o oder b mit einerlei Radius in m und n, und Fig. 7.

ziehe aus diesen beiden Durchschnittspunkten mit möglichst großem Radius Bögen bei c, so liegt der Durchschnitt der letztern in der Richtung ab.

Beweis. Aus 76, 33, 8.

3. Es sind zwei Punkte a, b, eine Richtung bestimmend gegeben; man soll ohne Gebrauch des Lineals noch mehrere Punkte jener Richtung suchen.

Fig. 8. Auflösung. Man verfahre zuerst nach Aufgabe 2., um den Punkt c der Richtung ab zu finden, verlängere aber die Bogen cg, ch, so daß aus c gleiche Sehnen nach g und h getragen werden können. Aus den Punkten g, h beschreibe man wieder mit einerlei Radius Bögen di, dk und setze diese Operation beliebig fort, je nachdem man eine größere Anzahl Punkte c, d, l. . . . der Richtung ab finden will.

Beweis. Aus 76, 33, 8.

4. Die Summe zweier gegebenen Linien ab, cd als Linie darzustellen.

Fig. 9. Auflösung. Trage auf eine Richtung diese Linien so, daß a′ b′ gleich ab, c′ d′ gleich cd werde und daß der Endpunkt b′ zugleich der Anfangspunkt von c′ d′ sei. Die ganze Linie a′ d′ ist dann den gegebenen Linien zusammen genommen, also gleich ab + cd.

Anmerkung. Wäre die Bedingung nicht, daß die construirte Summe eine Gerade sein soll, so könnte jede zusammenhängende Verbindung der gegebenen Linien als Summe gelten, indem die Bewegung von a′ nach b′ und von da weiter nach d′ in jeder bei b′ gebrochenen Linie dieselbe bleibt. Selbst dann, wenn die Richtung von b′ aus wieder nach a′ zu verfolgt würde, hebt sich die Zweideutigkeit, sobald man beachtet, daß die zweite Bewegung der erstern entgegengesetzt geschieht, und die Summanden in diesem Falle ab + (— cd) sein würden.

Diese Betrachtung führt auf folgende Aufgabe.

5. Die Differenz zweier gegebenen Linien ab und cd als Gerade darzustellen.

Fig. 10. Auflösung. Trage auf die größere Linie cd aus einem der Endpunkte die kleinere ab auf, so ist das Stück bc = cd — ab.

Beweis. $\underbrace{cd - ab}_{bc} + ab = cd$.

Anmerkung. Bekanntlich läßt sich für das Produkt zweier Linien ab . cd ein Rechteck setzen, welches diese Linien

zu Seiten hat, ohne daß man diese Figur selbst als wirkliches Produkt der beiden Linien betrachten darf.

Für den Quotienten zweier Linien läßt sich hingegen keine Figur irgend einer Art setzen, weil ein solcher Quotient nur eine abstracte Zahl sein kann. Wie Quotientengleichungen zwischen Raumgrößen zu betrachten sind, ist aus der Geometrie bekannt.

6. In einem Punkt c einer Geraden eo eine Normale zu errichten.

Auflösung. Trage aus c nach beiden Seiten gleiche Theile in m und n, und beschreibe aus diesen Punkten mit einerlei, beliebigem Radius Bogen, die sich in f oder in g schneiden. Die Verbindungslinie jedes dieser Durchschnitte mit c ist normal eo. Fig. 11.

Beweis. Man ziehe fm und fn; dann nach 27c, oder aus 31.

Anmerkung. Je weiter zwei Punkte, welche eine Richtung bestimmen, aus einander liegen, desto genauer läßt sich beim praktischen Zeichnen diese Richtung ziehen. Man beschreibe deshalb die gedachten Bogen mit möglichst großem Radius und benutze, wenn es der Raum gestattet, beide Punkte f und g zum Anlegen des Lineals; auch nehme man die gleichen Theile cm und cn möglichst groß.

7. In der Mitte zweier, auf einer Geraden bestimmten Punkte m und n eine Normale zu ziehen.

Auflösung. Hier sind die Punkte der vorigen Aufgabe in m und n schon gegeben. Man hat also aus diesen unmittelbar die Bogen zu beschreiben und die Verbindungslinie fg zu ziehen. Fig. 11.

Die so erhaltene Normale wird durch die Mitte von m, n gehen.

Beweis. Aus 33.

8. An dem Ende a einer Geraden ab eine Normale zu errichten.

1. Auflösung. Wenn der Raum es gestattet, so verlängere man ab über a hinaus nach e und verfahre nach Aufgabe 6. Fig. 12.

Beweis. Wie bei Aufgabe 6.

2. Auflösung. Man nehme auf ab einen beliebigen Punkt d an, beschreibe aus a und d Bogen bei e mit beliebigem, aber gleichem Radius, setze dann in e ein, um mit demselben Radius den Bogen gad zu beschreiben. Nun verlängere man die Richtung de, bis sie den Bogen in g schneidet und ziehe ga, so ist diese normal ab. Fig. 13.

Beweis. Aus 76 und 89.

Fig. 13. 3. Auflösung. Man nehme über ab den Punkt e beliebig, beschreibe aus ihm einen Kreisbogen, der durch a geht und die Richtung ab noch in einem Punkt d schneidet. Verfährt man nun weiter nach Auflösung 2., so erhält man ag normal ab.

Beweis. Aus 89.

Fig. 14. 4. Auflösung. Beschreibe aus a einen Bogen mno mit beliebigem Radius, trage denselben Radius aus m nach n und aus n nach o; beschreibe auch aus n und o Bogen mit einerlei Radius, die sich in c schneiden, und ziehe ac, welche normal ab sein wird.

Beweis. Aus 104, 103, 33, oder 78.

Fig. 15. 5. Auflösung. Trage nach b fünf beliebig gleiche Theile, beschreibe aus a mit einem Radius, gleich der Summe von vier solchen Theilen einen Bogen, schneide ihn aus dem dritten Theilpunkt d mit einem Radius gleich der Summe von fünf dieser Theile in c und ziehe ac, welche normal ab in a sein wird.

Beweis. Aus 47, 31.

1. Anmerkung. Man hat also hier die sogenannten Pythagorischen Zahlen 3, 4, 5, welche in Linien gegeben ein rechtwinkliches Dreieck bilden.

Eben so könnte man andere dergleichen, wie 8, 15, 17; 7, 24, 25 oder auch deren Vielfaches benutzen.

2. Anmerkung. Die letzte Auflösung kann beim Abstecken eines rechten Winkels auf dem Felde, Bauplatz und a. a. O. benutzt werden. Man theilt dann eine Schnur in drei solche Theile, die sich verhalten wie 3: 4: 5, faßt die beiden Enden dieser Abtheilungen zusammen, indeß zwei Gehülfen die Schnur an den mittlern Theilpunkten zu einem Dreieck ausspannen, welches immer ein rechtwinkliches sein wird.

Auch wird der Lehrwinkel von Latten, welchen man auf dem Bauplatze braucht, mit Benutzung obiger Verhältnisse gebildet.

Fig. 16. 3. Anmerkung. Die Genauigkeit eines materiellen rechten Winkels, wie man sich dessen beim Zeichnen bedient, mittelst einer construirten Normale zu prüfen, bleibt immer praktisch unzuverlässig. Sicherer verfährt man folgendermaßen: man lege den Winkel in die Lage A an ein, nach Aufgabe 1, Anmerk. sorgfältig geprüftes Lineal, ziehe an der Kathete bc eine zarte Linie, lege dann den Winkel in die Lage A′, ohne die Berührungsfläche mit dem Papier zu verändern und prüfe, ob die Kante ab in dieser zweiten

Lage die gezogene Linie in allen Punkten berührt. Ist dieses nicht der Fall, so ist der Winkel, als rechter, unrichtig.

Beweis. Aus 17.

9. Von einem Punkt d, außerhalb einer Geraden ab eine Normale auf letztere zu fällen.

1. Auflösung. Beschreibe aus d einen beliebigen Bogen, der die Gerade ab in zwei Punkten m und n schneidet. Aus diesen Durchschnittspunkten beschreibe mit einerlei, beliebigem Radius Bogen bei p oder auch bei q. Die Verbindungslinie dp oder dq ist normal ab in dem Punkte d. Fig. 17.

Beweis. Aus 76, 33.

2. Auflösung. Läge der gegebene Punkt d nahe über einem der Endpunkte von ab, so daß auf dieser Seite der Bogen die Gerade nicht schneiden könnte; so verlängere man entweder ab und verfahre nach der ersten Auflösung, oder, man nehme näher der Mitte von ab einen beliebigen Punkt g an, verfahre damit nach der ersten Auflösung, ziehe fg und mit dieser eine Parallele durch d, nach Aufgabe 12. Fig. 18.

3. Auflösung. Man nehme einen Punkt m beliebig auf ab, beschreibe aus ihm, mit einem Radius gleich md, einen Bogen bei e, den man aus b mit dem Radius bd schneidet; so ist die Verbindungslinie de ebenfalls normal ab. Fig. 19.

Beweis. Aus 33.

4. Auflösung. Ist g der gegebene Punkt, so ziehe man gd beliebig, halbire sie in e, beschreibe aus dieser Mitte mit einem Radius ed = eg einen Bogen, welcher ab in dem Fußpunkt der Normale ga schneiden wird. Fig. 13.

Beweis. Aus 89.

Anmerkung. Beim practischen Zeichnen bedient man sich eines materiellen Winkels (eines rechtwinklichen hölzernen oder metallnen Dreiecks) um Normalen, beziehlich gegebenen Linien zu ziehen.

Man legt nemlich die eine Kathete genau an die gegebene Gerade mo, an die Hypotenuse aber ein Lineal A, schiebt das Dreieck an dem unverrückten Lineal so weit fort, bis es in der Lage B′ mit der Kathete a′ b′ (d. i. ac) den gegebenen Punkt d oder d′ schneidet, und zieht die verlangte Normale b′ a′. Fig. 20.

Beweis. Aus 12.

10. Durch einen Punkt a einer gegebenen Richtung ab eine andere so zu legen, daß sie mit ersterer einen Winkel bildet, der gleich einem gegebenen Winkel α ist. Fig. 21.

1. Auflösung. Man beschreibe aus o einen beliebigen Bogen, der beide Schenkel von α schneidet, und mit demselben Radius einen solchen aus a, trage die Sehne mn von d nach f und ziehe ac durch f, so ist der Winkel cab = nom = α.

Beweis. Aus 79.

Fig. 22. 2. Auflösung. Verbinde zwei beliebige Punkte a, c der beiden Schenkel des gegebenen Winkels α und construire, nach Aufgabe 76, ein Dreieck a′ b′ c′, congruent dem Dreieck a b c.

Beweis. Aus 25.

Anmerkung. Auf dem Felde kann man ein ähnliches Verfahren anwenden, um ohne Winkelinstrumente einen Winkel abzustecken, welcher einem Winkel der Zeichnung entsprechen soll. Man trägt nemlich auf die Schenkel des gezeichneten Winkels von b nach a und c ein gleiches Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe und mißt ac. Dadurch kennt man die drei Seiten eines Dreiecks, welches den Winkel α hat, und ist in den Stand gesetzt, ein ähnliches Dreieck a′ b′ c′ nach den natürlichen Maaßen auf dem Felde abzustecken, welches, nach 59, auch den Winkel α enthalten wird.

2. Anmerkung. Auf dem Papiere kann man sich des Instruments, welches Transporteur heißt und in den meisten Reißzeugen enthalten ist, bedienen, um einen, der Figur nach oder in Theilen des rechten Winkels, d. i. als n.$\frac{1}{90}$, gegebenen Winkel aufzutragen. Obgleich dieses Verfahren nicht streng geometrisch genannt werden kann, so muß man es doch öfters zu Hülfe nehmen.

Fig. 23. 11. Es ist ein Punkt g außerhalb einer Richtung ab gegeben, man soll durch ihn eine andere Richtung legen, die mit ersterer einen Winkel gleich α bildet.

Auflösung. Trage nach Aufgabe 10. den gegebenen Winkel α in einen beliebigen Punkt d der Richtung ab, ziehe cd, und fg parallel cd durch g.

Beweis. Aus 12.

12. Zu einer gegebenen Richtung eine andere zu ziehen, die mit der ersten parallel ist.

Da die Auflösung dieser Aufgabe mit den folgenden zusammenfällt und von ihnen nur darin unterschieden ist, daß der Abstand der Parallelen unbestimmt gelassen ist, so kann auf die folgenden Aufgaben verwiesen werden.

13. Durch einen gegebenen Punkt c eine Gerade zu ziehen, die der Richtung ab parallel ist.

1. Auflösung. Aus c fälle die Normale cd auf ab und errichte beliebig eine andere fg, mache fg gleich cd und ziehe die Richtung cg, welche parallel ab sein wird. Fig. 24.

Beweis. Aus 18 und 19.

2. Auflösung. Ziehe durch c eine schneidende Linie df, mache den Winkel $\beta = \alpha$, oder $\varepsilon = \delta$, so bildet immer der Schenkel mn die Parallele zu ab durch den Punkt c. Fig. 25.

Beweis. Aus 13.

Anmerkung. Dasselbe Resultat erhält man, wenn die Gegenwinkel gleich, oder auch, wenn die inneren oder äußeren Winkel gleich 2 R gemacht werden.

3. Auflösung, Ziehe aus c mit beliebigem Radius einen Bogen op und mit demselben Radius einen andern aus p, (welcher also durch c geht), trage die Sehne mc von p aus nach o und ziehe die Richtung co, welche parallel ab sein wird. Fig. 26.

Beweis. Aus 80 und 13.

4. Auflösung. Ist q der gegebene Punkt, und zieht man beliebig eine Richtung qn, welche die gegebene ab schneidet, bildet dann mit qn irgend ein gleichschenkliches Dreieck mno auf ab, nach Aufgabe 113, 2, macht op gleich oq, so ist die Richtung pq parallel ab. Fig. 27.

Beweis. Aus 58, 52.

5. Auflösung. Man lege durch den gegebenen Punkt c eine beliebige Richtung, welche ab (in m) schneidet, beschreibe aus m einen willkührlichen Kreisbogen pr, mit demselben Radius auch aus c den unbestimmten Bogen ns und einen Halbkreis hik. Fig. 28.

Nun trage man die Sehne pr aus k nach i, die Sehne ih aus n nach v und ziehe die Richtung cv, welche parallel ab sein wird.

Beweis. Aus 79, 14.

6. Auflösung. Auf dem Felde kann man sich folgender einfachen Methode bedienen:

Ist n der gegebene Punkt, durch den eine mit ab parallele Richtung gelegt werden soll, so stecke man eine beliebige Linie np ab, deren Endpunkt in ab fällt, d. h. man visire einen Punkt p zwischen a und b ein. Hierauf halbire man pn in o, nehme auf ab noch einen beliebigen Punkt q an, markire die Richtung qo nach r zu und trage die Länge qo in om. Die Richtung mn giebt die Parallele zu ab durch den Punkt n. Fig. 29.

Beweis. Aus 36, e, und 35 umgekehrt.

1. Anmerkung. Beim Zeichnen legt man ein materielles Dreieck A mit einer beliebigen Seite mn an die Fig. 30.

gegebene Richtung ab und an eine der andern Dreiecksseiten ein Lineal B, hält lezteres unverrückt und schiebt das Dreieck nach Erfordern an dem Lineale fort. Alle Linien, die an derjenigen Dreiecksseite gezogen werden, welche an der Richtung ab angelegt gewesen ist, sind parallel dieser und auch parallel unter sich.

2. Anmerkung. Ist das Dreieck ein rechtwinkliches, und legt man eine Kathete an ab, an die Hypotenuse aber das Lineal B, so sind alle Linien, die man in irgend einer veränderten Lage A′ an der Kathete m′n′, m″ n″ zieht, parallel ab, und zugleich sind die, welche man an der andern Kathete m′o′, m″o″ zieht, normal ab, m′n′, m″n″.

Beweis. Aus 16.

14. Es sind zwei Parallelen ab, cd ihrer Lage nach gegeben; man soll durch einen Punkt p außer ihnen eine Richtung so legen, daß das zwischen diesen Parallelen fallende Stück om einer gegebenen Linie n gleich werde.

Fig. 31. Auflösung. Man schneide aus einem beliebigen Punkte q der einen Parallele mit dem Radius gleich n die andere in r und ziehe mit qr eine Parallele mp durch p.

Beweis. Aus 76, 20.

Zweiter Abschnitt.

Die Theilung der Linien und Winkel, und die Proportionalen betreffend.

15. Einen Winkel zu construiren, welcher das Doppelte, Drei=, Vierfache, ... nfache eines gegebenen Winkels α ist.

Fig. 32. 1. Auflösung. Nimmt man die Spitze des Winkels α als Mittelpunkt eines Kreises von beliebigem Radius an und trägt die Sehne c 1 nach 2, 3, 4 ... n, zieht nach diesen Punkten Radien, so bilden diese mit dem Schenkel ac Winkel, die zwei=, drei= .... nmal so groß sind, als der gegebene Winkel α.

Beweis. Aus 79, 81.

Anmerkung. Durch dieses Verfahren läßt sich ein Vielfaches von α versinnlichen, welches gleich $4\,R + \varphi$, $6\,R + \mu$ .... $m \, . \, R + \omega$ ist.

Fig. 33. 2. Auflösung. Nachdem man die Schenkel des Winkels α hinreichend verlängert hat, nehme man auf dem einen ab beliebig, trage diese Länge weiter von b nach c,

von c nach d, von da nach e u. s. f., und verbinde die genannten Punkte nach ihrer Folge, so wird der Winkel dbc = 2 . ∟dac = 2 α, der Winkel dce = 3 α, der Winkel fde = 4 α u. s. w. sein.

Beweis. Aus 29, 23, 21.

Anmerkung. Diese Auflösung findet ihre Grenze für diese Richtung, sobald man zu einer Verbindungslinie gelangt, deren Kreisbogen einen der Schenkel von α tangirt. Fällt aber der Berührungspunkt außerhalb eines schon gefundenen Punktes, so läßt sich das Verfahren noch in entgegengesetzter Richtung verfolgen.

So theoretisch begründet aber diese Construction auch ist, so wenig praktisch ist sie; weil unmerkliche Differenzen beim Bilden der gleichschenklichen Dreiecke sich bedeutend vergrößern, je weiter man die Operation fortsetzt.

16. Einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen (zu halbiren).

Auflösung. Nimmt man am gleich an beliebig und beschreibt aus m und n mit einerlei Radius Bogen, die sich in d schneiden, so halbirt die Verbindungslinie da des Punktes d mit der Spitze a den gegebenen Winkel bac, und zugleich jeden zwischen seinen Schenkeln aus a beschriebenen Bogen, wie mon. Ein Gleiches erhält man, wenn die Bogen bei e beschrieben werden. Fig. 34.

Beweis. Aus 33, 31.

Anmerkung. Durch Wiederholung dieses Verfahrens, für die Hälften, Viertel u. s. w. des getheilten Winkels, läßt sich jeder Winkel in 4, 8, 16 . . . . 2^n gleiche Winkel zerlegen, oder, was gleichbedeutend ist, es lassen sich $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{2^n}$ eines gegebenen Winkels finden.

17. Einen Kreisbogen agb rein geometrisch, ohne Hülfe des Lineals, in zwei gleiche Theile zu theilen, wenn man dessen Mittelpunkt c oder Halbmesser ac kennt.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Radius ac aus a und b die Kreisbogen cd und ce, und schneide sie aus c mit dem Radius ab in d und e. Fig. 35.

Aus den letztern Punkten beschreibe man ferner mit dem Radius ae die Bogen af und bf, und zuletzt mit dem Radius cf, aus e und d, die Bogen bei g. Diese schneiden sich in der Mitte des Bogens agb.

Beweis. Man ziehe nach Angabe der Figur die nöthigen Verbindungslinien und noch die Normale aus b auf ce.

Es sind dann die Dreiecke dac, abc und ceb congruent; daher ist die Summe der Winkel $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, (aus 13 und 23.) und der Winkel dce ein gestreckter. Da diese Dreiecke, so wie auch das Dreieck abf gleichschenklich sind, so ist leicht zu erweisen, daß die Punkte c, g, f in einerlei Richtung liegen, welche normal de ist, und daß cf die Sehne ab und den zugehörigen Bogen halbirt.

Es bleibt aber noch darzuthun, daß der Durchschnittspunkt g jedesmal ein Punkt des Bogens agb und der Halbirungspunkt selbst sei. Man hat in dem Dreieck bcd

$$bd_q = bc_q + cd_q + 2 \,.\, cd \,.\, cp, \text{ nach } 49.$$
$$= bc_q + cd_q + cd_q$$
$$= bc_q + 2 \,.\, cd_q$$

und weil $df = bd$, so ist auch

$$df_q = bc_q + 2 \,.\, cd_q$$

und $df_q - cd_q = bc_q + cd_q$

Im Dreieck cdf ist, weil $dg = cf$

$$df_q - cd_q = cf_q = dg_q$$

Daher hat man

$$dg_q = bc_q + cd_q$$

Nun ist noch im Dreieck cdg

$$dg_q = cg_q + cd_q$$

folglich $bc_q + cd_q = cg_q + cd_q$

oder $bc_q = cg_q$

und $bc = cg = ac$

diese drei Linien sind also Radien des Bogens, weshalb g in den Bogen selbst fallen muß.

Fig. 36. 18. Einen gegebenen Winkel bac in zwei solche Theile zu theilen, daß die Sinus dieser beiden Winkel sich verhalten wie zwei gegebene Linien m und n.

Auflösung. Man errichte in a auf jedem Schenkel eine Normale, nemlich ae normal ac und af normal ab; nehme ae beliebig und mache af gleich der vierten Proportionale zu n, m und ae. Nun ziehe man eg parallel ac, fg parallel ab, verbinde den Durchschnittspunkt g mit der Spitze des Winkels, so ist ag die verlangte Theilungslinie.

Beweis. Fällt man aus einem Punkte von ag z. B. aus g, Normalen auf die Schenkel des gegebenen Winkels, so lassen sich diese als Sinus der Winkel bag und cag, und ag als Radius betrachten.

Es ist aber $n : m = ae : af$, nach der Constr., und weil ae ╪ gi und af ╪ gh, so ist auch

$$n : m = gi : gh$$

oder, wenn man die trigonometrische Function herstellen will

$$n : m = \frac{gi}{ag} : \frac{gh}{ag} = \text{Sin.}\,\beta : \text{Sin.}\,\alpha.$$

19. Einen rechten Winkel in drei gleiche Winkel zu theilen.

Auflösung. Man nehme den Scheitel c als Mittelpunkt eines Kreises von beliebigem Radius, trage leztern von n nach e und von m nach d, ziehe dc, ec, so hat man $\llcorner$ ecm = dce = ncd = $\frac{1}{3}$ R. Fig. 37.

Beweis. Aus 104, 103.

1. Anmerkung. Verbindet man mit dieser Aufgabe die vorhergehende, so lassen sich noch Winkel von $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} \ldots \frac{1}{3 . 2^n}$ R. finden, oder was gleichbedeutend ist, es läßt sich durch Verbindung beider Operationen ein rechter Winkel in 6, 12, 24 . . . . $3 . 2^n$ gleiche Theile theilen.

2. Anmerkung. Ein Winkel der $\gtrless$ R kann streng geometrisch nicht in 3, 5, 7 . . . 2 n + 1, ein rechter Winkel aber nur in drei oder fünf gleiche Theile getheilt werden.

Die Trisection eines beliebigen Winkels gehörte in frühern Zeiten zu den Aufgaben, welche den Scharfsinn der Mathematiker in Anspruch nahmen. Man hat daher eine große Anzahl annähernder Lösungen dieser Aufgabe durch Constructionen, welche zum Theil ziemlich verwickelt sind. Unter den mechanischen Auflösungen sind die mittelst des Transporteurs und versuchsweiser Theilung die am meisten praktischen.

Wird die Aufgabe analytisch behandelt, so stößt man auf die Gleichung des dritten Grades

$$3 \text{ sin. } \alpha - 4 \text{ sin. } \alpha^3 = \text{sin. } 3\,\alpha$$

den Radius = 1. gesetzt, wozu eine Construction nicht möglich ist.

Die Alten wandten zur Lösung dieses Problems eine Curve an, welche Quatratrix des Dinostratus genannt wird, und zu den mechanischen Linien gehört.

20. Als Beispiele zur Lösung der vorstehenden Aufgabe durch Construction, welche aber nur annährungsweise richtig ist, mögen folgende hier stehen:

1. Auflösung. Ist amb der zu trisecirende Winkel, $< \frac{1}{2}$ R, so ziehe man die Halbirungslinie cm und einen Bogen ab aus dessen Spitze m; theile cm in a′, b′ in drei gleiche Theile und ziehe durch a′, mit den Schenkeln des Fig. 38.

Winkels parallel, da′ und ea′, so sind d und e die Theilpunkte.

Fig. 39. 2. Auflösung. Man ziehe die Halbirungslinie mc und aus m einen Bogen ab, trage in a′, b′, m′ drei beliebige gleiche Theile; ziehe m′a und m′b, und mit dem Halbmesser am durch diese Theilpunkte Bögen, durch deren Durchschnitte e′, f′ aber Parallelen mit mc. Diese bestimmen in d und e die gesuchten Theilpunkte.

Beweis. Zu der ersten Auflösung.

Um das Resultat übersichtlicher zu machen, sei der Winkel amb = 42° angenommen, also ist der Winkel amc = 21°, und ∟da′m = 2 R — 21 = 159°. Man hat also, weil mc = md = r = 1 und a′m = $\frac{2}{3}$ r = $\frac{2}{3}$

L. Sin. 159° + L. $\frac{2}{3}$ = Sin. ∟mda′

d. i. L. Sin. 21° + L. 2 — L. 3 = Sin. ∟mda′

9, 5543292 + 0, 3010300 — 0, 4771213 = 9, 3782379

= L. Sin. 13° 49′ 20,4″

daher ∟dmc = 7° 10′ 39,6″

∟dme = 14° 21′ 19,2″

Es ist aber $\frac{42^0}{3}$ = 14°; daher ist der durch die Construction gefundene Winkel um 0° 21′ 19,2″ zu groß.

21. Einen rechten Winkel in fünf gleiche Theile zu zerlegen.

Fig. 40. 1. Auflösung. Beschreibe, nach Aufgabe 111, auf ac ein gleichschenkliches Dreieck cde, in welchem jeder Winkel an der ungleichen Seite das Doppelte des Winkels an der Spitze ist. Man hat dann den Winkel α = R — $\frac{4}{5}$R = $\frac{1}{5}$ R. Theilt man noch dessen Complement acd in vier gleiche Theile, so muß auch jeder gleich $\frac{1}{5}$ R sein.

Beweis. Aus 54, 63.

Fig. 41. 2. Auflösung. Man bilde mit dem Radius bc = bd ein gleichschenkliches Dreieck, worin die Winkel dcb = cdb = $\frac{4}{5}$ R also der Winkel dbc = $\frac{2}{5}$ R ist. Halbirt man diesen durch be, so erhält man ∟ebc = $\frac{1}{5}$ R; und theilt man noch den Winkel dba in drei gleiche Theile, indem man die Sehne dc von d nach 4 und von a nach 3 trägt, so hat man die verlangte Theilung.

Beweis. Aus 54, 63.

22. Eine gegebene Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Nach Aufgabe 7 oder 24.

23. Eine gegebene Linie in drei gleiche Theile zu theilen.

1. Auflösung. Nach Aufgabe 24.

2. Auflösung. Beschreibe über der Gegebenen ab einen Halbkreis, mit dessen Radius die Bogen cm und dm aus a und b; nehme dann den Radius ab und beschreibe damit auch Bogen aus a und b, die sich in f schneiden mögen. Zieht man nun die Verbindungslinien fc, fd, so schneiden diese die gegebene Linie in drei gleiche Theile. Fig. 42.

Beweis. Aus 104, 58, 52.

3. Auflösung. Bilde über ab ein gleichseitiges Dreieck abc und eins dergleichen abf, theile ac und bc in zwei gleiche Theile und ziehe fd und fe; letztere theilen die gegebene ab in die verlangten drei gleichen Theile. Fig. 43.

Beweis. Aus 57, 52.

Anmerkung. Bei Vergleichung der beiden Auflösungsarten wird man leicht die Uebereinstimmung in ihren Grundlagen bemerken.

24. Eine gegebene Linie ab in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man bilde mit ab einen beliebigen Winkel bac, trage aus a gleiche Theile von beliebiger Größe nach c, verbinde den nten Theilpunkt mit dem Endpunkt b der gegebenen Linie und ziehe mit dieser Verbindungslinie Parallelen durch die Theilpunkte 1, 2, 3, 4 .... n. Diese Parallelen schneiden ab in die verlangten gleichen Theile. Fig. 44.

Beweis. 57.

Anmerkung. Es ist praktisch bequem, die gleichen Theile auf ac ungefähr so groß zu nehmen, als die auf ab werden könnten. Man erhält dann nicht zu spitze, also genauere Schnitte auf ab.

25. Eine Linie ab blos mittelst Parallelen, ohne Beihülfe des Zirkels, in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe durch die Endpunkte von ab zwei Parallelen ar, bs beliebig, nehme auf bs irgend einen Punkt m und ziehe am, dann in nachstehender Folge $pm \parallel ab$, $pn \parallel am$, $nq \parallel ab$, $qo \parallel am$ .... Fig. 45.

Dann verbinde man den Endpunkt a mit dem nten Durchschnittspunkte auf bs und ziehe dm, cm ... mit dieser Verbindungslinie parallel, so ist ac = cd = db ...

Beweis. Aus 53, 33.

26. Man soll die Linie ab in eine Anzahl Theile theilen, die sich verhalten wie m : n : o : p ....

Auflösung. Man verfahre wie bei Aufgabe 24, trage aber auf ac solche Theile, die das gegebene Verhältniß haben, so wird auch ab verhältnißgleich getheilt. Fig. 46.

Beweis. Wie bei Aufgabe 24.

1. Anmerkung. Sollte z. B. ab in Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 2 : 4 : 1 : 5 : 7, so trage man
Fig. 46. eine beliebige Einheit so oft auf ac, als die Summe der Einheiten sämmtlicher Verhältnißzahlen beträgt, hier 19 mal und ziehe die Parallelen durch den 2., 6., 7. und 12. Theilpunkt.

2. Anmerkung. Man erhält durch diese Construction ein Mittel, den Maaßstab zu einer Zeichnung zu finden, wenn man nicht diesen, sondern blos das Maaß einer gewissen Linie der Zeichnung kennt. Die Größe einer solchen Linie ab wäre z. B. 8° 7′ 4″ Decimalmaaß. Man nehme auf einem andern Maaßstabe 8°, 7′, 4″ einzeln, trage diese drei Theile von a nach c, verbinde den dritten dieser Theilpunkte d mit b und ziehe durch die andern beiden Parallelen mit db. Wäre nun nd = 8° jenes Maaßstabes, so würde mb auch 8° nach dem Verhältniß der Zeichnung sein. Man theile daher letztere Länge in 8 gleiche Theile und erhält so die Rutheneinheit des Maaßstabes, nach welchem die Zeichnung gefertigt wurde.

Fig. 47. 27. Man soll ohne Hülfe des Zirkels die Linie a′b′ so theilen, daß $a'1 = \frac{1}{2} a'b'$, $a'2 = \frac{1}{3} a'b'$, $a'3 = \frac{1}{4} a'b' \ldots\ldots$ $a'n = \frac{1}{n+1} a'b'$ werde.

Auflösung. Man ziehe cd und ef normal a′b′, dann ce und df in angemessener Entfernung parallel a′b′, ferner die Diagonalen cf, de, durch deren Durchschnitt ab parallel a′b′ und noch af, so ist ab = a′b′ und $av = bv = \frac{1}{2}$ ab. Nun ziehe man in nachstehender Folge db, cm′, cn′, du, co′, dt, cp′ ...., wodurch man nach einander die Punkte v, u, t, s .... auf ab erhält, welche den Forderungen entsprechen.

Beweis. Zieht man durch mm′, nn′, oo′, pp′ .... Richtungen, so gehen diese durch die Punkte v, u, t, s .... und sind parallel ef, wie leicht zu erweisen ist. Nun ist eb = bf, folglich auch vm = vm′ und weil vm′ = m′l′, so ist ml′ = 3 vm; da auch kk′ parallel ef, so muß un′ = n′k″ = k″k′ = un, also nk′ = 4. un, und uk′ = ti′ = 3. un sein.

Eben so ist to = to′ = . . . = i″i′, daher oi′ = 5. to, ti′ = 4. to; ph′ = 6. ps, sh′ = 5. ps; qg′ = 7. qr, rg′ = 6. gr u. s. w.

Hieraus ergeben sich folgende Proportionen:

$$\left\{\begin{matrix} ml' \\ 3.\ vm \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} uk' \\ 2.\ vm \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} dl' \\ \frac{1}{2}ab \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} dk' \\ au \end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\ ab$$

$$\left\{\begin{matrix} nk' \\ 4.\ un \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} ti' \\ 3.\ un \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} dk' \\ \frac{1}{3}ab \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} di' \\ at \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\ ab$$

$$\left.\begin{matrix} oi' \\ 5\,.\,ot \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} sh' \\ 4\,ot \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} di' \\ \frac{1}{4}ab \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} dh' \\ as \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{5}\,ab$$

$ar = \frac{1}{6}\,ab$, ... u. s. w.

Anmerkung. Obgleich diese Theilungsmethode praktisch nicht füglich anzuwenden ist, weil die kleinsten Ungenauigkeiten sich progressiv vergrößern, je weiter die Construction fortgesetzt wird, so gehört dieselbe doch zu den elegantesten und wird interessant durch die vielen Beziehungen, welche die möglichen Verbindungslinien eingehen. Diese werden noch dadurch vermehrt, daß auch die harmonische Theilung darein verwebt ist.

28. Eine gegebene Linie ab so zu schneiden, daß sich die Stücke verhalten, wie zwei gegebene Linien m und n. Fig. 48.

Auflösung. Ziehe durch einen der Endpunkte a beliebig ag, trage die Gegebene n in ac, lege durch den andern Endpunkt b eine Parallele bf mit ag und trage die andere Gegebene m in bd; zieht man noch cd, so schneidet diese in h die verlangten Stücke auf ab ab, und es ist

$$ah : hb = n : m.$$

Beweis. Aus 58.

29. Zwischen zwei Linien m und n die mittlere arithmetische Proportionale zu finden.

1. Auflösung. Trage die Summe $m + n$ auf eine Gerade ac, und halbire letztere in k, so ist $ak = ck$ die mittlere arithmetische Proportionale zwischen m und n. Fig. 49, a.

Beweis. Denn es ist $ac = m + n$

$$ak = \frac{ac}{2} = \frac{m+n}{2}$$

2. Auflösung. Man trage n in bc, m in ba, halbire ac in k, so hat man in bk die verlangte Proportionale. Fig. 49, b.

Beweis. $ac = n - m$

$$ak = \tfrac{1}{2}\,(n - m)$$

also $$ab + ak = m + \tfrac{1}{2}\,(n - m) = \frac{n+m}{2} = bk.$$

30. Das arithmetische Mittel zwischen n gegebenen Linien a, b, c . . . . w, x zu finden.

1. Auflösung. Man trage auf eine Gerade die Summe der n Linien und theile diese Summe s in n gleiche Theile, so ist $\frac{1}{n}.\,s$ gleich dem verlangten Mittel zwischen den gegebenen Linien.

2. Auflösung. Man suche nach Aufgabe 29. $\frac{a+x}{2}$ bilde aus dem gefundenen Mittel und den übrigen gegebenen Linien b, c . . . . v, w eine Summe, theile diese in

n — 2 gleiche Theile, so ist ein solcher Theil ebenfalls das gesuchte arithmetische Mittel.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Die Aufgaben 29 und 30 kommen in Anwendung bei Berechnung eines Grundstücks, welches eine krummlinie Grenze hat, wenn es zulässig ist, die Theile der Abscissenlinie gleich zu nehmen.

31. Eine Linie ab so zu theilen, daß eine zweite gegebene ml die mittlere geometrische Proportionale zu den Stücken ist.

Fig. 50. Auflösung. Beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in einem Punkte auf ab eine Normale ac, mache sie gleich ml, ziehe cd parallel ab und aus d die Normale df, so hat man

af: df = df: bf

d. i. af: ml = ml: bf.

Beweis. Aus 15, 20, 89 und 61.

1. Anmerkung. Man sieht leicht, daß ml, als mittlere Proportionale zwischen Theilen von ab, nicht größer sein kann als $\frac{1}{2}$ ab.

2. Anmerkung. Unter dem abgekürzten Ausdruck „Proportionalen" werden in Zukunft nur geometrische Proportionalen verstanden werden.

32. Die mittlere Proportionale zu zwei gegebenen Linien a und c zu suchen.

Fig. 51. 1. Auflösung. Man bilde die Summe a + c = mo, beschreibe über dieser einen Halbkreis, errichte in dem gemeinschaftlichen Endpunkt n die Normale np, so ist

on: np = np: nm

d. i. c: np = np: a

Beweis. Wie bei voriger Aufgabe.

2. Auflösung. Mache mo = c und mn = a, errichte in n die Normale nq, beschreibe über mo einen Halbkreis und ziehe mp, so ist

mo: mp = mp: mn

d. i. c: mp = mp: a

Beweis. Aus 91.

Fig. 52. 3. Auflösung. Bildet man aus c — a = hi — im eine Linie hm, beschreibt aus h mit dem Radius gleich hm einen Kreis, construirt dann nach Aufgabe 249 eine Tangente aus i, deren Berührungspunkt k sein mag, so hat man

hi: ik = ik: im

d. i. c: ik = ik: a

Beweis. Zieht man den Halbkreis ikh, so ist der Winkel ikh $=$ R.

Nach 47 ist nun $ik_q = hi_q - hk_q$

oder $hi + hk : ik = ik : hi - hk$

und weil $hk = hm$, so hat man:

$$hi + hk : ik = ik : \underbrace{hi - hm}_{im}$$

Es ist aber hi + hk Secante des Kreises h, die sich mit der Tangente ki schneidet, also ist nach 94.

$$Sec : ik = ik : im$$

Anmerkung. Durch wiederholte Anwendung dieser Aufgabe lassen sich zwischen zwei gegebenen Linien a und b immer 3, 7, 15, 31, ... $2^n - 1$ mittlere Proportionalen aufsuchen; wenn man nemlich zuerst

$a : x : b$ (eine mittlere Proportiale), dann

$a : y : x$ und auch $x : z : b$ sucht. Man hat dann

$a : y : x : z : b$ (drei mittlere Proportionalen)

Operirt man weiter und construirt

$a : \alpha : y, \quad y : \beta : x, \quad x : \gamma : z, \quad z : \delta : b$

so ergiebt sich

$a : \alpha : y : \beta : x : \gamma : v : \delta : b$ (d. i. sieben mittlere Proportionalen) u. s. w.

33. Die dritte Proportionale zu zwei gegebenen Linien m und n zu suchen.

Auflösung. Trage auf den Schenkel eines beliebigen Winkels dae die gegebene m von a nach b, und die n von a nach d, desgleichen von a nach c, verbinde b, c und ziehe de parallel bc, so ist Fig. 53.

$$ab : ad = ac : ae$$

und weil $ad = ac = n$ ist,

$$m : n = n : ae$$

Beweis. Aus 58, 59.

34. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden.

1. Auflösung. Man trage auf die Schenkel eines beliebigen Winkels die drei gegebenen Linien folgendergestalt auf: m in ab, n in ac und o in bd, verbinde dann b, c und ziehe de parallel bc, so ist Fig. 54.

$$ab : bd = ac : ce$$

d. i. $m : o = n : ce$

Beweis. Aus 58, 59.

Fig. 54. 2. Auflösung. Trägt man die gegebenen Linien so auf, daß ab = m, ac = n und ad = o wird, so hat man

ab : ac = ad : ae

d. i. m : n = o : ae

Beweis. Wie oben.

Fig. 55. 3. Auflösung. Man ziehe beliebig die schneidenden Linien ac und dg, mache bg = m, ab = n und bc = o, lege durch die Endpunkte a, g, c einen Kreis, so ist das Stück bd die gesuchte Proportionale.

Beweis. Nach 92 ist

bg . bd = ab . bc

oder bg : ab = bc : bd

d. i. m : n = o : bd

Fig. 56. 4. Auflösung. Ziehe einen beliebigen Winkel abc, mache ab = o, bc = n und bd = m, lege durch a, d, c einen Kreis, welcher ab in f schneiden mag. Man hat nun, nach 93

ab . bf = bc . bd

oder ab : bc = bd : bf

d. i. o : n = m : bf

Fig. 57. 5. Auflösung. Bilden m, n, o die drei ersten Glieder der Proportion, so beschreibe man mit einem Radius gleich m einen Kreis, und mit dem Radius gleich n einen zweiten concentrischen, ziehe einen beliebigen Radius gh, trage die dritte Gegebene o von h nach k, ziehe auch einen Radius gi, verbinde h, i und trage hi von k nach l. Zieht man nun li, so ist diese vierte Proportionale zu m, n und o.

Beweis. Aus 76. und der Construction folgt, daß das Dreieck hgi congruent ist dem Dreieck gkl; daher ist ∟hgi = kgl, also auch ∟hgk = lgi. Nun ist aus 113.

gh : gi = hk : il

d. i. m : n = o : il

Anmerkung. Zur Auflösung der vorstehenden Aufgabe ließen sich noch mehrere Sätze der Elementar-Geometrie benutzen. So wie man auch durch Versetzung des vierten Gliedes oder Verwechselung der Verhältnisse dergleichen Aufgaben eine andere Gestaltung geben könnte. Man kann aber solche Aufgaben, wie man in der folgenden sieht, leicht auf obige zurückführen.

35. Es sind drei Linien a, b, c gegeben; es soll eine vierte x gefunden werden, die sich zur dritten verhält wie die erste zur zweiten.

Auflösung. Man würde sonach die Proportion haben

x : c = a : b,

welche sich in nachstehende umändern läßt

$$b : a = c : x$$

und nun nach der vorigen Aufgabe gelöst werden kann.

36. Es ist eine Linie ab ihrer Größe, und eine schneidende mn ihrer Lage nach gegeben; man soll über ab einen Kreisabschnitt bilden, so daß dessen Peripherie auf mn ein Stück co abschneidet, welches die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten auf ab ist.

Auflösung. Man errichte in der Mitte von ab eine Normale, und eine solche auf mn in dem Durchschnittspunkte c. Da wo sich beide Normalen treffen, in d, ist der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius db, welcher das verlangte Stück co = ch abschneidet. Fig. 58.

Beweis. Aus 83, 92.

37. Drei Linien verhalten sich wie v : b : w. Es ist b und die Summe der beiden andern, v + w, gegeben; man soll die Linien v und w selbst finden.

Auflösung. Ist v + w = y, so mache man mn = y, beschreibe über ihr einen Halbkreis, errichte eine beliebige Normale mr = b, ziehe rt parallel mn und die Normale tq; man hat dann Fig. 59.

$$mq : qt = qt : qn$$

d. i.

$$v : b = b : w$$

Beweis. $mn = y = mq + qn$

$$mr = b = qt$$

und nun aus 61.

38. Zu zwei Linien, welche in m und n gegeben sind, sollen zwei mittlere Proportionalen interpolirt werden, deren Differenz gleich d′ gegeben ist.

Auflösung. Man ziehe beliebig bc, mache ba = m, ac = n und errichte eine Normale ai, auf welche man d′ in ad trägt. Halbire bc in e und ad in f, errichte in diesen Punkten Normalen, deren Durchschnitt o sein mag und beschreibe aus o mit dem Radius ob einen Kreis, welcher durch den Punkt c gehen und die Normale ad in g und i schneiden wird. Die Abschnitte ag und ai geben die gesuchten Proportionalen, so daß Fig. 60.

$$m : ai = ag : n$$

und auch $ai - ag = d'$ sein wird.

Beweis. Nach 92 ist

$$ab \cdot ac = ag \cdot ai$$

oder

$$ab : ag = ai : ac$$

d. i.

$$m : ag = ai : n$$

Ferner ist $ai - ag = ai - (fg - af) = ai - (fi - df)$

$$= ai - di = ad = d'$$

Staatliche Bibliothek
Regensburg

39. Es sei anstatt der Differenz die Summe der, zwischen μ und η zu interpolirenden Proportionalen in s gegeben.

Fig. 61. Auflösung. Mache ck $= \eta$ und schneide auf dieser das Stück kl $= \mu$ ab; errichte in k eine Normale kn $=$ s, und andere in den Halbirungspunkten p von kn und q von lc. Zieht man aus deren Durchschnittspunkt o einen Kreis durch l, so schneidet dieser die Normale kn in i und m,: so daß ki und km die zu interpolirenden Proportionalen geben. Es ist nemlich

$$kl : ki = km : ck$$

oder $\mu : ki = km : \eta$

und auch $ki + km = s$

Beweis. Nach 93 ist

$$kl \,.\, ck = ki \,.\, km$$

oder $kl : ki = km : ck$

Ferner ist $ki = mn$

daher $km = in$

folglich $ki + in = ki + km = kn = s.$

Anmerkung. Würde die Normale kn Tangente des Kreises in p, so würden die gesuchten Proportionalglieder gleich sein; es würden nemlich die Punkte i und m in p zusammenfallen.

Erreichte aber der Kreis die Normale nicht, so sind die Bedingungen der Auflösung widersprechend und die Construction wäre nicht ausführbar.

Fig. 62. 40. Es sind zwei Linien m und n gegeben; man soll eine Folge von Geraden finden, wovon zwei anstoßende sich immer wie die gegebenen verhalten, d. i. welche alle in ihrer Folge eine geometrische Reihe bilden.

Auflösung. Man trage die Gegebene m auf eine Gerade in ab, errichte in a eine Normale aa′ und mache sie auch gleich m, in b aber eine zweite bb′ gleich n. Ziehe die Convergente a′ b′, bis sie die ab in h trifft, trage bb′ nach bc, errichte auch in c eine Normale und fahre so fort, daß man cc′ in cd, dd′ in de . . . trägt. Die Theile auf ah geben die gesuchte Reihe

$$ab : bc : cd : de : ef \ldots .$$

deren Quotient $\frac{n}{m}$ ist.

Beweis. Es ist $ah : bh = aa' : bb' = ab : bc$
$= ah - ab : bh - bc = bh : ch =$
$bb' : ch = bc : cd$ u. s. w.

I. Anmerkung. Setzt man diese Operation fort, so ergiebt sich constructiv die Bestätigung des arithmetischen Lehrsatzes

Staatliche Bibliothek Regensburg

daß die Summe einer fallenden Reihe, auch wenn die Anzahl ihrer Glieder größer als eine noch so große Zahl, (∞) ist, immer eine endliche Größe bleiben wird.

Es wird nemlich die Summe der Glieder den Punkt h nicht überschreiten, das ist, deren Summe wird nie größer als ab $- \frac{1}{\infty}$ werden.

2. Anmerkung. Durch dieselbe Construction läßt sich auch eine steigende Reihe bilden, deren Quotient $\frac{m}{n}$ ist, wenn man $ab = aa' = n$ und $bb' = m$ macht. Daß diese Reihe nur ∞ zur Grenze hat, ist leicht zu ersehen.

41. Eine gegebene Linie ab nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu theilen, nämlich daß Fig. 63.

$$ab : x = x : ab - x$$

werde, d. i. daß sich die ganze Linie zum größern Stück verhalte, wie dieses Stück zum kleinern.

Auflösung. Man errichte eine Normale ac in einem Endpunkte der gegebenen Linie, mache sie gleich $\frac{1}{2}$ ab und verbinde b, c. Aus c beschreibe man den Bogen ad und aus b mit dem Radius bd den Bogen dg, so ist bg die gesuchte x.

Beweis. Da ab normal ac, so ist ab Tangente des Bogens ade und man hat nach 94.

$$ab_q = bf \cdot bd$$

oder $bf : ab = ab : bd$

daher auch $ab : bf - ab = bd : ab - bd$

und weil $df = ab$ ist,

$$ab : bd = bd : ab - bd$$

d. i. $ab : bg = bg : ag.$

1. Anmerkung. Die vorstehende Aufgabe kann auch folgendermaßen gestellt werden:

eine Linie in zwei solche Theile zu zerlegen, daß das Rechteck aus der ganzen Linie und dem kleinen Abschnitte gleichflächig sei dem Quadrate aus dem größern Stück.

2. Anmerkung. Die alten Geometer nannten diese Theilung den goldnen, auch den göttlichen Schnitt oder auch wohl nur den Schnitt, jedes der Stücke Apotom, und legten einen hohen Werth auf diese Theilung, die auch in mehrerer Beziehung bemerkenswerthe Eigenschaften hat.

42. Ein fortlaufendes System von Linien zu bilden, die alle nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten

sind, wenn eine nach diesem Verhältnisse getheilte Linie als Anfangsglied gegeben ist.

Auflösung. Soll die Reihe eine steigende sein, so verlängere man die gegebene Linie um ihr größeres Segment, um das nächste Glied der Reihe zu bilden und fahre so fort, indem, nach 55, die ursprüngliche Linie immer das größere Segment, das zugesetzte Stück aber das kleinere Segment der Theilung ist.

Soll die Reihe aber fallend sein, so verkürze man zuerst die gegebene Linie um ihr kleineres Segment, welche Differenz das nächste Glied giebt, und verfahre mit jeder so gebildeten Linie auf gleiche Weise, um das folgende Glied der Reihe zu bekommen.

Fig. 64. 43. Eine gegebene Linie ad harmonisch zu theilen, d. i. sie in drei solche Stücke ab, bc, cd zu zerlegen, daß

$$ad : ab = \underbrace{ad - ac}_{cd} : \underbrace{ac - ab}_{bc}$$

werde.

Auflösung. Man nehme außerhalb der gegebenen Linie einen beliebigen Punkt g an, verbinde ihn mit den Endpunkten a und d, lege durch irgend einen Punkt b auf ad eine Linie ef parallel dg und mache bf gleich be. Zieht man noch fg, so sind ab, bc, cd die gesuchten Segmente.

Beweis. Es ist wegen 57.

$$ad : ab = dg : be = dg : bf$$

und wegen der ähnlichen Dreiecke cdg und bcf auch

$$= cd : bc.$$

Anmerkung. Die Eigenschaften der harmonischen Proportionen finden Anwendung in der Physik, und haben merkwürdige Beziehungen beim Kreise und bei den Kegelschnitten. Sie haben ihre Benennung muthmaßlich dadurch erhalten, daß sie den Tonverhältnissen zur Grundlage dienen. Stützt man nämlich die Saite eines Monochords in dem Verhältniß 3 : 4 : 6, so geben die Längen 3 und 6 die Octave, 4 und 6 die Quinte, 3 und 4 die Quarte. Diese Zahlen bilden aber eine harmonische Proportion nämlich

$$3 : 6 = 4 - 3 : 6 - 4.$$

Dritter Abschnitt.

Gemischte Aufgaben, Linien und Winkel betreffend.

Fig. 65. 44. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels bac eine gegebene Linie, gleich m, so einzutragen, daß sie

mit dem einen Schenkel einen Winkel α bilde, und daß ihre Endpunkte auf die beiden Schenkel des Winkels bac fallen.

Auflösung. Man lege an ac einen Winkel cag $= \alpha$, verlängere ag nach d und mache ad $=$ m, ziehe de parallel ac, und ec parallel ad durch den Durchschnittspunkt e, so erfüllt diese die Forderung.

Beweis. Aus 11, 33.

45. Eine Gerade so zu ziehen, daß sie mit einer, ihrer Lage nach gegebenen de parallel, und das zwischen den Schenkeln eines Winkels bac liegende Stück derselben gleich einer gegebenen Linie m sei. Fig. 66.

Auflösung. Man ziehe beliebig fg parallel de und mache sie gleich m, dann ziehe bg parallel ac und durch den Durchschnittspunkt b, bc parallel de. Die Linie bc leistet das Verlangte.

Beweis. Aus 15, 20.

46. Es ist ein rechtwinkliches Dreieck abc und eine Linie l gegeben; man soll die Linie so zwischen beide Catheten legen, daß die Hypotenuse sie in zwei gleiche Theile theilt. Fig. 67.

Auflösung. Man nehme $\frac{1}{2}$ l, beschreibe mit ihr als Radius einen Bogen aus b und schneide aus einem seiner Durchschnitte h (oder o) die eine Cathete in g. Zieht man die Richtung gh nach i, so ist diese gleich l und wird durch die Hypotenuse in h halbirt.

Beweis. Da die Bogen aus b bei h, und aus h bei g mit gleichem Radius beschrieben worden sind, so ist das Dreieck ghb ein gleichschenkliches. Bezeichnet man den Winkel hgb mit α, so ist auch der Winkel hbg $= \alpha$, und der Winkel ghb $= 2\,(R - \alpha)$; daher der Winkel ihb $= 2\,\alpha$. Der Winkel ibh ist, als Complement zu α, gleich $R - \alpha$; folglich muß der Winkel hib $= 2R - (R - \alpha + 2\,\alpha) = R - \alpha$, gleich dem Winkel iba und sonach das Dreieck ibb ein gleichschenkliches sein.

Es ist daher hi $=$ bh $=$ gh.

Anmerkung. Bei Beschreibung des Bogens ho können drei Fälle eintreten, derselbe schneidet die Hypotenuse, er berührt sie, oder erreicht sie nicht. Im ersten Falle kann die Linie durch jeden der Durchschnittspunkte h oder o gelegt werden; im zweiten Falle ist der Berührungspunkt auch Theilpunkt; im dritten ist die Auflösung unmöglich.

47. Man soll mit einer Seite ab eines Dreiecks eine Parallele (de) ziehen, welche gleich sei der Summe oder der Differenz der Abschnitte ad, be, die zwischen ab und der Parallele liegen. Fig. 68.

3*

Auflösung. Man suche zu (ab + ac + bc), oder wie in der Figur zu (ab + ac — bc), zu ab und ac die vierte Proportionale, trage sie in ad und ziehe de parallel ab, so ist hier ad — be = de.

Beweis. Aus 58, mit zweckmäßiger Verwandlung und Verbindung der Proportionen.

Fig. 69. 48. In der Winkelebene α ist ein Punkt b seiner Lage nach gegeben; man soll durch ihn eine Linie legen, die, von den Schenkeln des Winkels α begrenzt, in b halbirt wird.

Auflösung. Ziehe durch b eine Parallele bn mit dem Schenkel ac, mache dn gleich an und ziehe die Richtung db, bis sie den Schenkel in c trifft, so ist bc = bd.

Beweis. Aus 51.

49. Es ist, wie in voriger Aufgabe, ein Winkel bac und in seiner Ebene ein Punkt d gegeben. Man soll durch letztern eine Linie legen, so daß die Stücke zwischen dem Punkt und den Schenkeln sich verhalten wie m : n.

Fig. 70. 1. Auflösung. Sollten z. B. die Stücke das Verhältniß 3 : 4 haben, so ziehe man ade, mache de gleich $\frac{3}{4}$ ad und lege durch e mit ac eine Parallele be.

Zieht man die Richtung bd, so ist
bd : cd = 3 : 4.

Beweis. Aus 58, b; 59.

Fig. 71. 2. Auflösung. Ziehe durch den gegebenen Punkt p eine Normale auf ac, mache pq gleich der vierten Proportionale zu m, n und op, ziehe qr parallel ac und die Richtung rp nach s, so ist rs die in p bedingungsgleich getheilte Linie.

Beweis. Aus 58.

50. Es liege der gegebene Punkt außerhalb der Winkelebene in p und es soll pg : ge = m : n werden.

Fig. 72. Auflösung. Man ziehe pd parallel ac, suche zu n, m und ad die vierte Proportionale, trage sie in dg und ziehe die Richtung pg nach e.

Beweis. Aus 58.

51. Es ist in der Winkelebene bac ein Punkt o gegeben; man soll durch ihn eine Gerade legen, die auf den Schenkeln vom Scheitel ab gleiche Stücke abschneidet.

Fig. 73. Auflösung. Trage auf die Schenkel gleiche Theile ag und af beliebig, verbinde die Theilpunkte und ziehe nm parallel fg durch o.

Beweis. Leicht.

52. Sollen sich unter den übrigen Bedingungen der vorigen Aufgabe die Theile der Schenkel verhalten wie zwei

gegebene Linien m und n, so verfahre man folgendergestalt.

1. Auflösung. Man trage aus a die beiden Gegebenen auf die Schenkel des Winkels, verbinde die Endpunkte durch fg und ziehe durch o mit fg die Parallele mn.

Beweis. Leicht.

2. Auflösung. Ist p der gegebene Punkt, so ziehe man durch ihn su parallel ab, mache su gleich m und st gleich n, verbinde ut und lege de parallel ut durch p. Fig. 74.

Beweis. Aus 12, 58 b, 59.

53. Es ist ein Winkel α gegeben, man soll mehrere Winkel zeichnen, die gleich α sind, und deren Schenkel durch zwei Punkte a, b der Schenkel von α gehen. Fig. 75.

1. Auflösung. Man lege durch die beiden Punkte und die Spitze des Winkels α, nach Aufgabe 227, einen Kreis. Dieser ist geometrischer Ort der Spitzen aller Winkel, welche durch a und b gehen und gleich α sind, so daß $\beta = \gamma = \alpha$ ist.

Beweis. Aus 80.

2. Auflösung. Man verbinde a, b, trage an ab den gegebenen Winkel α, ziehe bd normal bc und ad normal ab. Halbirt man nun bd in m und beschreibt über bd einen Kreis, so ist dieser der geometrische Ort für die Spitzen aller Winkel wie φ, ϱ, o ..., welche gleich α sind, sobald deren Schenkel durch a, b gehen. Fig. 76.

Beweis. Aus 80, 89, 90.

54. Es sind außerhalb einer gegebenen Richtung ab zwei Punkte m und n ihrer Lage nach gegeben; man soll auf ab denjenigen Punkt finden, der von m und n gleichweit abliegt.

Auflösung. Verbinde m, n und ziehe durch die Mitte von mn eine Normale. Wo diese die gegebene Richtung ab, (in c) schneidet, da ist der gesuchte Punkt, und cn = cm. Fig. 77.

Beweis. Denkt man sich nc und mc gezogen, so ergiebt sich die Richtigkeit der Construction aus 31.

55. Es sind zwei Punkte a, b und eine beliebige Linie pmn gegeben; man soll auf dieser Linie einen Punkt (m) finden, dessen Verbindungslinien mit den gegebenen Punkten sich verhalten wie v : w. Fig. 78.

Auflösung. Man ziehe die Richtung ab, mache, nach Aufgabe 28, ad : bd = v : w, ziehe ae und df beliebig aber parallel unter sich, mache ae gleich ad, df gleich bd und ziehe die Richtung ef. Aus dem Durchschnittspunkt c beschreibe mit dem Radius cd einen Kreis; erhält

man durch diesen einen Berührungspunkt oder Durchschnittspunkte m, m', so erfüllt jeder die Bedingung, so daß

entweder $am : bm$
oder $am' : bm'$ $\Big\} = v : w$
ist.

Beweis. Man ziehe cm, so ist

$ad : bd = v : w$, durch Construction.
oder $ad : bd = ae : df = v : w$
und auch $ae : df = ac = cd$
daher $ad : bd = ac : cd$
und $ad : bd = ac - ad : cd - bd$
d. i. $ad : bd = cd : bc = v : w$
also auch $ac : cd = cd : bc$
und weil $cd = cm$

$ac : cm = cm : bc$

daher sind die Dreiecke acm und bcm ähnlich
folglich $am : bm = ac : cm = ac : cd = ad : bd = v : w$.

Fig. 79. 56. Drei gegebene Linien m, n und o so zu ziehen, daß drei der Endpunkte zusammen, die andern drei aber in einerlei Richtung fallen und gleichen Abstand unter sich haben.

Auflösung. Man trage auf eine Gerade ae die mittlere n der gegebenen Linien zweimal in ac und ce, beschreibe mit einem Radius gleich m aus e einen Bogen bei d und schneide ihn aus a mit einem Radius gleich o, ziehe dann die Richtung dc und mache bc gleich cd, verbinde a, b, so ist $ad = o$, $ac = n$, $ab = m$, bcd ein gestreckter Winkel und $cd = bc$.

Beweis. Verbindet man be, so kann man den Beweis leicht aus 36. führen.

Anmerkung. Die Auflösung wird unmöglich, wenn von den 3 Linien o, 2n und m nicht die Summe je zweier größer ist als die dritte Linie.

Die Aufgabe läßt sich auch folgendergestalt geben: man soll aus zwei Seiten und der Transversale auf die Mitte der dritten das Dreieck bilden.

Fig. 80. 57. Bei übrigens gleichen Bedingungen der vorigen Aufgabe sollen die Abstände der Endpunkte A, B und C sich verhalten wie n : m.

Auflösung. Sind a, b und c die gegebenen drei Linien, so nehme man $BD = b$, $BE = \frac{n}{m} \cdot b$, bilde auf BE mit der gegebenen c und $\frac{n}{m} \cdot a$ ein Dreieck, ziehe die Richtung

CB, mache BA $= \frac{m}{n} \cdot$ BC und ziehe AD. Es ist dann AD $=$ a, BD $=$ b, CD $=$ c und

$$AB : BC = m : n.$$

Beweis. Aus 58, 59.

58. Es sind drei Punkte o, p und q gegeben; man soll durch p eine Linie (ab) so legen, daß die verticale Projection der Punkte q und o auf ab einer gegebenen Linie m gleich sei. Fig. 81.

Auflösung. Man beschreibe aus q mit einem Radius gleich m einen Bogen, lege, nach Aufgabe 249, durch den Punkt o eine Tangente an den Bogen, verbinde den Berührungspunkt t mit q, ziehe ab parallel tq durch den Punkt p und fälle die Normalen qs und tr.

Beweis. Da der Radius $=$ m, so ist der Bogen vw geometrischer Ort für die Endpunkte der Projection, deren andere in q liegen. Da aber die Projection des Punktes o rechtwinklich sein soll, so kann der Endpunkt t nur im Berührungspunkte liegen, nämlich da, wo die Tangente aus o mit dem normalen Radius qt zusammen trifft.

Nach 20. ist auch sr $=$ qt $=$ m.

59. Es sind vier Punkte m, n, o und p ihrer Lage nach gegeben; man soll durch p eine Richtung so legen, daß die Verticalprojectionen der übrigen drei Punkte auf ihr einen Abstand von einander haben, der sich verhält wie m′ : n′ Fig. 82.

Auflösung. Man ziehe die Richtung mn, nehme ns so, daß mn : ns $=$ m′ : n′ ist, ziehe die Richtung os und auf diese normal qs. Zieht man nun durch p ab parallel qs, so ist

$$tu : uv = m' : n'$$

Beweis. Leicht.

60. Es sind die Punkte d, l, m und n in einerlei Richtung gegeben; man soll durch d eine Gerade (dk) ziehen und auf dieser drei Punkte h, i, k so bestimmen, daß die Winkel dhl, dim, und dkn gleich werden den gegebenen Winkeln α, β, γ, und daß zugleich die Abstände der gedachten Winkelspitzen, nämlich hi, hk und ik sich verhalten wie m : n : o. Fig. 83.

Auflösung. Man beschreibe über dl, dm und dn Kreisabschnitte, welche Peripheriewinkeln, gleich α, β, γ, zugehören, siehe Aufgabe 236; ziehe durch d die Linie dk, nach Aufgabe 288. so, daß gf : ge : ef $=$ m : n : o werde, so ist dk die gesuchte Linie, auf welcher die Punkte h, i und k den Forderungen entsprechen.

Beweis. Nach 82 ist $dh = 2dg$; $di = 2df$; $dk = 2de$;

daher $hi = 2df - 2dg = 2gf$

$hk = 2df - 2dg = 2ge$

und $ik = 2de - 2df - 2ef$

Nach der Construction ist aber

$gf : ge : ef = m : n : o$

folglich auch $2gf : 2ge : 2ef = m : n : o$

oder $hi : hk : ik = m : n : o$

Anmerkung. Fallen die Mittelpunkte der Kreisabschnitte in einerlei Richtung, so ist die Aufgabe unbestimmt.

Fig. 84. 61. Es sind zwei Punkte a, b nebst einer Richtung cd der Lage nach gegeben; man soll auf letzterer den Punkt finden, dessen Verbindungslinien mit a und b gleiche Winkel an cd bilden.

Auflösung. Nimmt man an, bh sei eine der Verbindungslinien und sie sei über den gefundenen Punkt h hinaus verlängert, so wäre $\beta = \alpha$, und da sonach auch $\beta = \gamma$ sein muß, so hätte man die Aufgabe durch 31. zu lösen.

Man fälle nämlich eine Normale aus einem der gegebenen Punkte auf cd, z. B. ag, mache $fg = af$ und verbinde bg, so ist der Durchschnittspunkt h der gesuchte, und $\llcorner \alpha = \gamma$.

62. Es sind zwei Punkte p, p' und eine Richtung mn gegeben; man soll auf letzterer einen Punkt (o.) finden, so daß, wenn man denselben mit den gegebenen Punkten verbindet, $\llcorner p'on - pom = \delta$ werde.

Fig. 85, a, b. Auflösung. Man fälle aus p eine Normale pq auf mn, mache $kq = pk$ und ziehe p'q. Auf p'q bilde man einen Peripheriewinkel p'vq, welcher gleich ist dem Supplement des Winkels δ. Man zeichne nämlich, Fig. 85 b, den Winkel δ, ziehe die Sehne r's' und die Normale x'u', halbire dann, Fig. 85 a, die Sehne p'q in x, errichte die Normale vw, trage r'x' in rx und sx, die x'u' aber in xu, verbinde u mit s und r und ziehe mit ur, us durch p' und q die Parallelen p'v und qv.

Nun suche man den Mittelpunkt w eines Kreises, der durch die Punkte p', v, q geht und schneide mit ihm die Richtung mn in o. Verbindet man diesen Punkt mit p und p', so sind pom und p'on die Winkel, welche der Forderung entsprechen.

Beweis. Das Dreieck pok ist congruent dem Dreieck qok. Denkt man qo gezogen und über o hinaus nach y

verlängert, so hat man, nach voriger Aufgabe, $\llcorner$moq $=$ yon $=$ mop.

also $\llcorner p'oy = p'on - yon = p'on - mop$

und weil $\llcorner p'oy = 2R - p'oq = 2R - (2R - \delta) = \delta$

so ist auch $\llcorner p'on - pom = \delta$.

63. Es sind die Punkte a und b und eine Richtung mn gegeben. Man soll auf letzterer einen dritten Punkt c finden, so daß $\llcorner abc - bac = \omega$ werde. Fig. 86, a, b.

Auflösung. Man verfahre zuerst wie bei voriger Aufgabe, bilde aber über bc einen Peripheriewinkel bce $= 2R - (\omega + 2\varphi)$, (unter φ den Neigungswinkel der Richtungen ba und mn verstanden), so wird $\llcorner abc - bac = \omega$ sein.

Beweis. Man ziehe rs parallel ab und verlängere ec über c hinaus nach v, so ist

$\llcorner abc - bac = bcr - acs = bcn - rcn - (acm + scm)$

$= bcn - acm - 2 . rcn = bcv - 2 . rcn$,

wegen rs parallel ab, ist aber $\llcorner rcn = \varphi$

und $\llcorner abc - bac = bcv - 2\varphi$.

Da nun nach der Construction $\llcorner bce = 2R - \omega - 2\varphi$

also $\omega = 2R - 2bc - 2\varphi$ ist

und weil $\llcorner bcv = 2R - 2bc$,

so hat man $\llcorner abc - bac = \omega$.

64. Es sind drei Punkte, in einerlei Richtung liegend, gegeben; man soll einen vierten finden, an welchem die Winkel gleich werden, wenn man die Verbindungslinien mit den drei gegebenen Punkten zieht. Fig. 87.

Auflösung. Ist a, b und c die Lage der drei Punkte, so suche zu ab — bc, bc und ac die vierte Proportionale, trage diese in ce und beschreibe über be einen Halbkreis. Dieser ist der Ort aller Convergenzpunkte d . . . . ., an welchen die Winkel, wie adb, bdc, gleich sind.

Beweis. Verlängert man ad nach f, zieht de, dann cf parallel bd, cg parallel ad und noch fg, so ist cdfg, nach 16 und 38 ein Rhombus, daher der Winkel cde gleich edf. Es ist aber

$$\llcorner \gamma + \beta = R$$

also auch $\delta + \alpha = R$

folglich $\alpha = \beta$

Anmerkung. Für einen bedingungsgleichen Punkt d ist der ganze Kreis geometrischer Ort. Selbst wenn d in b fällt, also der $\llcorner$adc in einen gestreckten übergeht, oder wenn d in e fällt, und der gedachte Winkel in Null übergeht, ist diese Beziehung geltend. Haben die Punkte a, b und c gleichen Abstand unter einander, so liegt d auf

der Tangente des Punktes b. Oder, man kann sagen, sie liegt auf einen Kreisbogen, dessen Radius unendlich groß ist.

Man hat nemlich dann ab = bc, also

$$ab - bc : bc = ac : x$$

d. i. $$0 : 1 = 2 : x$$

und $$\frac{2}{0} = x = ce = \infty$$

folglich $$bc + ce = bc + \infty = \infty$$

65. Durch einen, innerhalb einer Winkelebene gelegenen Punkt d eine Richtung so zu legen, daß sie mit den beiden Schenkeln ab und ac gleiche Winkel bildet.

Fig. 88. 1. Auflösung. Ziehe mit einem der Schenkel (ab) eine Parallele durch d, mache fc = fd und ziehe die Richtung cd, so ist der Winkel bca gleich eba.

Beweis. Aus 12, 29.

Fig. 89. 2. Auflösung. Verlängere den Schenkel ac nach g, halbire den Winkel bag durch ah und ziehe durch den gegebenen Punkt d eine Parallele mit ah.

Beweis. Sollen die Winkel in m und n gleich sein, so muß nothwendig das Dreieck man ein gleichschenkliches werden. Es ist aber das Supplement mag gleich der Summe der Winkel, m + n, nach 21.

folglich $\frac{1}{2}$ ∟mag = hag = ∟n = ∟m

Fig. 90. 66. Es sind drei Punkte a, b, h, welche nicht in einerlei Richtung liegen, gegeben; man soll durch den letztgenannten eine Gerade so legen, daß die Verticalprojectionen der andern beiden Punkte auf dieser Geraden gleichen Abstand von h haben.

Auflösung. Man ziehe die Gerade ab, halbire sie in l, verbinde l mit h und mache cd normal lh. Legt man dann durch a und b Parallelen mit lh, so wird fh = hm.

Beweis. Aus 16, 51.

Fig. 91. 67. Es sind zwei, in a convergirende Linien ba und ca ihrer Größe und Neigung nach, und drei Linien A, B, C gegeben; man soll aus dem Convergenzpunkt a eine dritte begrenzte Linie ak so ziehen, daß, wenn man die Normalen km und kl zieht,

$$ak : cl : bm = A : B : C$$

werde.

Auflösung. Man trage die gegebene B in cd, die C in be und ziehe die Normalen cg, df und bg, ef. Durch deren Durchschnittspunkte f, g ziehe die Richtung gh und auch ga, schneide aus f mit einem Radius gleich A die

Linie ag in i und ziehe ak parallel fi. Fällt man noch aus k die Normalen km und kl, so ist die Aufgabe gelößt.

Beweis. Nach 51 ist

$$\left.\begin{array}{l} fi : ak \\ cd : cl \\ be : bm \end{array}\right\} = fg : gk$$

oder $A : ak = B : cl = C : bm$

also auch $A : B : C = ak : cl : bm$

68. Es sind zwei convergirende Richtungen, deren Durchschnitt nicht gefunden werden kann, in ab und cd gegeben; man soll durch einen Punkt e eine Richtung legen, die mit den ersten beiden einen Convergenzpunkt hat. Fig. 92.

Auflösung. Man ziehe eine beliebige Schneidende ad und eine andere ac durch den gegebenen Punkt e.

Nun ziehe man db ╪ ac, eg ╪ cd und gf ╪ cd. Die Richtung durch den Durchschnittspunkt f und den gegebenen Punkt e wird mit ab und cd in seinem Punkte x convergiren.

Beweis. Aus 51, 52.

69. Liegt der gegebene Punkt d außerhalb der beiden Convergirenden ab und ef, so ziehe man beliebig bd durch d und mit bd eine Parallele ac, verbinde d mit a, ziehe eg parallel ab, dann gf und lege durch d eine Parallele cd mit gf. Fig. 92.

Beweis. Wie in 68.

70. Man soll die Winkelebene zweier Richtungen cd und ab, deren Durchschnittspunkt nicht gefunden werden kann, halbiren.

1. **Auflösung.** Man suche nach Aufgabe 65. für irgend einen Punkt eine Linie ef, die mit den gegebenen Richtungen gleiche Winkel efc = fea bildet, errichte in deren Mitte g eine Normale, so wird diese mit jenen Richtungen in einem Punkte x convergiren und den Winkel dxb halbiren. Fig. 93.

Beweis. Aus 12, 29, 32.

2. **Auflösung.** Aus beliebig angenommenen Punkten q und t der gegebenen Richtungen ziehe man Normalen qm, tn, und mache sie gleich lang, lege durch m und n Parallelen mit ab und cd, halbire den Winkel mhn durch ho (welches am praktischsten geschieht, wenn man aus h einen Bogen rs und aus r und s die Bögen bei o mit einerlei Radius beschreibt), so ist die Richtung ho die gesuchte Halbirungslinie. Fig. 94.

Beweis. Aus 5, 31.

Anmerkung. Die Aufgaben 68, 69, 70 finden bei Constructionen der Linearperspective vielfache Anwendung.

71. Es schneiden sich zwei Richtungen ab und cd unter so spitzem Winkel, daß der Durchschnittspunkt unsicher wird; man soll ihn durch Construction genauer bestimmen.

Fig. 95. Auflösung. Man errichte, in möglichst großem Abstande von dem Durchschnitt, auf einer der Schneidenden die Normalen bf und ae, trage bd n mal auf bf und auch ac n mal auf ae, verbinde die letzten Theilpunkte, so schneidet diese Verbindungslinie den rechten Durchschnittspunkt m.

Beweis. Aus 58, 56.

Fig. 96. 72. Zwischen zwei gegebenen Punkten a und b ohne Gebrauch des Lineals die Mitte zu finden.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Radius ab aus b einen Kreis amnk, trage den Radius als Sehne nach m, n und c, beschreibe aus a und c die Bogen ar und cs und schneide sie mit dem Radius cn aus c und a in w und u. Mit demselben Radius ziehe noch aus u den Bogen ao und schneide ihn aus c mit dem Radius uw in o. Der letztgenannte Punkt ist die Mitte zwischen a und b.

Beweis. Man hat zuerst das halbe reguläre Sechseck amnc gebildet, also ist ac Durchmesser des Kreises und geht durch b als seinen Mittelpunkt; ferner finden sich zwei gleichschenkliche Dreiecke auc und awc, welche congruent sind. Daher haben die Punkte u und w gleichen Abstand von ac, und uw ist parallel ac. Desgleichen ist das gleichschenkliche aou gebildet, dessen ungleiche Seite nothwendig in die mit uw parallele Richtung ac fallen muß, wenn einer ihrer Endpunkte darin liegt.

Das Viereck acuw ist demnach ein Antiparallelogramm, in welchem die Winkel uac und wca gleich sind; der Winkel uao ist aber gleich dem Winkel uoa; daher ist das Viereck uwoc ein Parallelogramm und der Abstand des Punktes o von c muß gleich sein uw. Denkt man noch bv parallel ou gezogen, so ist leicht zu beweisen, daß das Dreieck aou congruent dem Dreieck obv sei; woraus folgt, daß ao = ob.

Anmerkung. Es geht auch schon aus der Construction co = uw hervor, daß das Viereck uwoc ein Parallelogramm ist, nachdem der Parallelismus von uw und ac nachgewiesen ist; und weil ∟uao = wca = uoa, ∟wco + uoc = 2 R, so ist auch uoa + uoc = 2 R.

Folglich liegt o in der Richtung ab, u. s. w.

73. Auf den Sätzen von der Proportionalität der Linien und der Aehnlichkeit der Dreiecke beruht die Construction der verjüngten Maaßstäbe.

1) Der einfachste unter den verschiedenen Arten solcher Maaßstäbe ist eine Gerade ab, worauf man die Einheit niederer Gattung von a nach c, n mal trägt; dieses n fache der Einheit dann als Einheit einer höhern Gattung betrachtet und weiter von c nach d, e, b .... trägt. Kann man n Einheiten der niedern Gattung nicht als eine Einheit höherer Gattung ansehen, so ist es meistens das Zehnfache, was man von c aus in die Punkte d, e . . . . absetzt. Fig. 97.

Wäre z. B. der zwölftheilige Fuß (Werkfuß) die Einheit, so kann man entweder in ac zehn solcher Einheiten und dann das zehnfache derselben d. i. die Länge ac nach d, e... tragen; oder man trägt 12 dieser Einheiten von a nach c und ein solches 12 faches von c nach d . . . . Im ersten Falle lassen sich immer n . 10 + h, z. B. 30 + 4 Fuß abnehmen; im zweiten Falle ist die Einheit höherer Gattung die Ruthe, und man kann n Ruthen + m Fuß zwölftheiliches Maaß abmessen.

Der Gebrauch dieses Maaßstabes ist sonach einfach, seine Theilung dem Bedürfniß nach aber sehr verschieden. Er ist nur da anzuwenden, wo es gestattet werden kann, Bruchtheile der Einheit schätzungsweise abzunehmen, z. B. bei einfachen Baurissen, Modellen und dergl., oder wenn man das Maaßverhältniß einer Zeichnung bezeichnen, dem Benutzer aber überlassen will, sich zum speciellen Gebrauch einen vollkommnern zu zeichnen.

2) Vollkommner im mindern oder höhern Grade sind die verschiedenen Arten der sogenannten Transversal-Maaßstäbe, Fig. 98, 99, 100, 101. Fig. 98—103.

Fig. 98 gewährt vor dem Fig. 97 den Vortheil, daß man die einzelnen Theile von a bis c nicht aufzutragen hat, welcher besonders dann vortritt, wenn die Länge der zehnfachen Einheit so klein ist, daß deren Theilung unsicher würde.

Das Maaß einer Linie mn wäre nach ihm gleich 10 + 6 = 16 Einheiten.

Kleinere Unterabtheilungen der Einheit können auf ihn auch nur schätzungsweise gemessen werden. Die Einfachheit seiner Construction empfiehlt ihn. Weniger gebräuchlich sind die Constructionen Fig. 99 und 100. Den letztern findet man zuweilen auf Zeichnungen architectonischer Ordnungen, wobei ab gleich der halben untern Säulenstärke (Model) gemacht, in vier Theile getheilt wird und vier Parallelen gezogen werden. Die Theile zwischen a, b sind dann die 32 partes.

In dem letztgenannten Falle bedient man sich auch der Form Fig. 102. Hier nimmt man ab gleich dem Model, trägt von b nach c 32 beliebige Theile, zieht die Diagonale ac und die Parallelen durch die Theilpunkte. Die Länge mn z. B. ist hier gleich 14 partes.

Fig. 102 ist ebenfalls in vielen Fällen bequem; vor allen aber verdient Fig. 103 den Vorzug.

Um einen dergleichen Transversal-Maaßstab zu zeichnen, trägt man auf eine Gerade ad die Längeneinheit, z. B. Fuß, zehnmal, wenn es Decimaltheilung, oder zwölfmal, wenn es Duodecimaltheilung sein soll, von a nach b, dann die Länge von 10 solchen Einheiten d. i. 1 Ruthe von b nach c, d..., errichtet in a, b, c.. Normalen und setzt von a nach h 10 (oder 12) gleiche beliebige Theile, durch welche Theilpunkte man mit ad Parallelen zieht. Verbindet man noch 9, h und legt mit dieser Verbindungslinie Parallelen durch 8, 7, 6, 5 ...., so ist der Maaßstab gezeichnet.

Diese Art Maaßstäbe werden bei Feldvermessungen und überhaupt da jedesmal angewendet, wo es darauf ankommt, Unterabtheilungen der Maaßeinheit genauer zu haben.

Sind Fig. 103 die Theile von a bis b Ruthen, so hat man auf den Parallelen des Dreiecks 0gm 1, 2, 3, 4... 10 Fuß; und, weil b, 1 = gm, so geben die Parallelen des Vierecks bgn 1, von unten auf gerechnet, 10 + 1, 10 + 2, 10 + 3 .... 10 + 10 Fuß, die bis zur nächsten Transversale 10 + 10 + 1 = 21, 22... Fuß: so daß eine Länge xy gleich 14 Ruthen 7 Fuß ist. Wären die Theile von a bis b Fuß, so wäre xy gleich 1 Ruthe 4 Fuß 7 Zoll Decimalmaaß u. s. w.

Von einem gut gezeichneten Maaßstabe fordert man

a) ein richtiges Verhältniß der verjüngten Einheit zur wirklichen;

b) die größte Genauigkeit der Theilung, den vollkommensten Parallelismus der Linien und deren möglichste Feinheit;

c) daß die Anordnung der Theilung bequem sei und nicht ein Zusammensetzen abgenommener Maaße nöthig mache und

d) daß dabei bemerkt sei, von welcher Art eines natürlichen Maaßes er die Verjüngung sein solle.

Fig. 104. 74. Soll man einen Situationsplan oder dergleichen im verkleinerten oder vergrößerten Verhältniß copiren, so gewährt eine Art Maaßstab wie Fig. 104 viel Bequemlichkeit.

Gewöhnlich geschieht dieses Uebertragen mittelst Quadraten, die man von beliebiger Größe über das Original und von verhältnißgleicher über die zu zeichnende Copie legt. Das Verjüngungsverhältniß ist also in den Seiten dieser Quadrate bestimmt. Es bleibt aber nöthig, daß man den Abstand der Durchschnitte von Linien, welche die Seiten der Quadrate schneiden, bis zu einer Ecke des Quadrats genauer bestimmen könne, als es das Augenmaaß vermag.

Man trage daher die Seiten der Verhältniß-Quadrate von a nach c und von a nach f, errichte in a eine Normale und verbinde einen beliebigen Punkt d auf ihr mit c und f, zwischen a und d aber ziehe man beliebige Parallelen mit fc.

Aus 57. sieht man, daß zu jeder Linie on des Originals das verhältnißgleiche in mn gegeben ist; und daß man zu einem Maaße des Originals nur das Stück einer Parallele, welches auf einer Seite von ad liegt, aufzusuchen hat, um in dem zugehörigen Stück der andern Seite das verhältnißmäßige kleinere oder größere der Copie zu finden.

Vierter Abschnitt.

Aufgaben die Dreiecke in ihren Linienbeziehungen betreffend.

A. Dreiecke im Allgemeinen betreffend.

74. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben zwei Seiten m, n und der von ihnen gebildete Winkel φ. Fig. 105, a.

Auflösung. Ziehe ab gleich n, trage, nach Aufgabe 10., in einen der Endpunkte einen Winkel cab $= \varphi$, mache dessen Schenkel ac $=$ m und verbinde bc.

75. Es sind zwei Winkel und eine Seite gegeben, man soll das Dreieck zeichnen.

Hier können folgende Fälle stattfinden:

a) Die gegebenen Winkel α und β liegen an der gegebenen Seite ab. Fig. 106.

Auflösung. Man trage die beiden Winkel in die Endpunkte von ab, so schneiden sich die andern Schenkel, gehörig verlängert, in dem dritten Eckpunkt c des gesuchten Dreiecks.

b) Die gegebenen Winkel liegen nicht beide an der gegebenen Seite. Fig. 107, a, b.

Fig. 107, a. 1. Auflösung. Trage an eine Gerade mn den Winkel α in mop, β in poq. Das Supplement γ giebt dann den dritten Winkel, welcher an der gegebenen Seite liegt, so daß die Auflösung auf die des ersten Falls zurückgeführt wird.

Fig. 107, b. 2. Auflösung. Man trage den Winkel α in einen Endpunkt der gegebenen Seite ab und in einen beliebigen Punkt des Schenkels ac den Winkel β in ars. Durch den Endpunkt b ziehe dann bc parallel rs, so ist abc das gesuchte Dreieck.

76. Mit drei gegebenen Linien m, n und o ein Dreieck zu construiren.

Fig. 108. Auflösung. Mache eine Gerade ab = m und beschreibe aus ihren Endpunkten mit n und o Bögen bei c. Der Durchschnittspunkt giebt die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks.

1. Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die Summe je zweier der gegebenen Linien nicht größer als die dritte ist.

2. Anmerkung. Da jede drei Punkte einer Zeichnung zu einem Dreieck verbunden gedacht werden können, so ist durch diese Aufgabe ein Mittel gegeben, die Lage jedes dritten Punktes gegen zwei bereits auf der Copie festgelegte überzutragen. Sie gewährt daher beim Copiren einer Zeichnung (Abtragen) einen wesentlichen praktischen Nutzen.

Fig. 109. 77. Sind zwei Seiten und ein von ihnen nicht eingeschlossener Winkel gegeben, so sind diese Stücke nur dann bestimmend, wenn der gegebene Winkel der größern Seite gegenliegen soll. Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, so können immer, außer jenem, noch zwei Dreiecke abc und abc′ gebildet werden, welche beide der Aufgabe genügen.

Anmerkung. Die Aufgaben unter A. gehen unmittelbar aus den Hauptlehrsätzen von der Congruenz der Dreiecke hervor und sind aus letztern zu beweisen.

B. Von den rechtwinklichen Dreiecken insbesondre.

Fig. 110. 78. Es soll ein rechtwinkliches Dreieck gezeichnet werden, wozu die beiden Katheten gleich r und s gegeben sind.

Auflösung. Bilde einen rechten Winkel bac, mache jeden Schenkel gleich einer der gegebenen Linien und verbinde die Endpunkte b, c.

Beweis. Leicht.

79. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben sind: eine Kathete gleich o und die Hypotenuse gleich h. Fig. 111.

Auflösung. Nachdem man einen rechten Winkel gezeichnet hat, mache man die eine Kathete ab gleich o, schneide die andere aus b mit einem Radius gleich h in c und verbinde b, c.

Beweis. Leicht.

80. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die Hypotenuse gleich h und einer der spitzen Winkel gleich γ gegeben sind. Fig. 112.

Auflösung. Man beschreibe über mn = h einen Halbkreis, trage in m einen Winkel omn = γ und verbinde den Durchschnittspunkt o des Schenkels und des Halbkreises mit n.

Beweis. Aus 89.

81. Ein rechtwinkliches gleichschenkliches Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse ab gegeben ist. Fig. 113.

Auflösung. Man halbire die Hypotenuse in c, errichte cd normal, beschreibe über ab einen Halbkreis und verbinde den Durchschnittspunkt d mit b und a.

Beweis. Aus 31, 89.

82. Ein rechtwinkliches gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe h + h′ der Hypotenuse h′ und der ihr zugehörigen Höhe h gegeben ist. Fig. 114.

Auflösung. Man theile die Gerade ab, welche jener Summe gleich gemacht worden ist, in drei gleiche Theile ae, ec und cb, beschreibe über ac einen Halbkreis und errichte in e eine Normale ef, so bestimmt diese im Durchschnitt f die Spitze des gesuchten Dreiecks acf.

Beweis. Aus 76, 31, 89.

83. Ein rechtwinkliches Dreieck zu bilden, wenn die Hypotenuse gleich m, und die Bedingung gegeben ist, daß der eine spitze Winkel γ das Doppelte des andern δ sein soll. Fig. 115.

Auflösung. Man beschreibe über cd = m einen Halbkreis, trage seinen Radius, als Sehne, von c nach e oder von d nach f. Beide letztgenannten Punkte genügen der Aufgabe und sind Spitzen zweier congruenten Dreiecke cdf und cde.

Beweis. Nach 89, ist der Winkel α ein rechter; nach 104 sind ce, ef Seiten eines regulären Sechsecks, dessen Winkel fec = $\frac{4}{3}$ R und worin die Seite ef parallel cd ist. Daher ist der Winkel fed = edc = $\frac{1}{3}$ R; folglich der Winkel $\gamma = 2\,R - (R + \frac{1}{3}R) = \frac{2}{3}$ R.

Fig. 117. 84. Man soll ein rechtwinkliches Dreieck bilden, worin die größere Kathete gleich m, und der gegenliegende Winkel α das Doppelte vom Winkel β sei.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Radius gleich m einen Halbkreis, errichte in dem Mittelpunkt c eine Normale cq, theile, nach 19., den rechten Winkel qcf in drei gleiche Theile, wodurch man die Punkte m, n auf dem Halbkreis erhält, und ziehe die Sehne an, so ist abc das verlangte Dreieck.

Beweis. Da der Winkel fcn $= \frac{2}{3}$ R, so ist der zugehörige Peripheriewinkel β gleich $\frac{1}{3}$ R; daher der Winkel α gleich $\frac{2}{3}$ R.

Fig. 118. 85. Es sei die größere Kathete, gleich m, gegeben, man soll ein rechtwinkliches Dreieck bilden, worin der Winkel, welcher jener Kathete gegenliegt, das dreifache des andern spitzen Winkels ist.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Radius, gleich m, einen Halbkreis, errichte im Mittelpunkt c eine Normale cg, halbire den Winkel gcf durch ce, und verbinde d, e, so ist acd das gesuchte Dreieck.

Beweis. Der Winkel ecf $= \frac{1}{2}$ R, also sein Peripheriewinkel edf $= \frac{1}{4}$ R und der Winkel dac $=$ R $- \frac{1}{4}$ R $= \frac{3}{4}$ R.

Fig. 119. 86. Es soll ein rechtwinkliches Dreieck gebildet werden, wobei die Bedingungen gegeben sind, daß die kleinere Kathete, gleich m, und der eine Winkel, welcher ihr gegenliegt, die Hälfte des andern sei.

Auflösung. Man theile den rechten Winkel in drei gleiche Theile, beschreibe mit dem Radius, gleich m, einen Halbkreis und ziehe die Richtung cf nach a.

Beweis. Das Dreieck cbf ist ein gleichseitiges, also der Winkel cfb $=$ cbf $=$ bcf $= \frac{2}{3}$ R, der Winkel fba $= \frac{1}{3}$ R und der Winkel bfa $= \frac{4}{3}$ R; folglich $\llcorner \beta = \frac{1}{3}$ R.

Fig. 120. 87. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn dessen Hypotenuse gleich h und die Summe der Katheten gleich s gegeben sind.

Auflösung. In dem Endpunkt einer Geraden ad $=$ s errichte die Normale dm, halbire den Winkel adm durch db und schneide letztere aus a mit einem Radius, gleich h, in b. Errichtet man dann in der Mitte n von bd eine Normale nc, so ergiebt sich das Dreieck abc, als das verlangte.

Beweis. Da der Winkel bdc gleich $\frac{1}{2}$ R, und das Dreieck bcd ein gleichschenkliches ist, so ist $\llcorner$ bcd $=$ acb $=$ R und cd $+$ ca $=$ bc $+$ ca $=$ s.

88. Es ist die Summe der Katheten gleich s und ein Winkel α gegeben, man soll das Dreieck zeichnen. Fig. 121.

Auflösung. Man errichte auf ab = s eine Normale in a, trage in cba den Winkel α, halbire den Winkel cab durch ad und fälle aus dem Durchschnittspunkte d eine Normale auf ab. Man hat dann in bed das verlangte Dreieck.

Beweis. Da ∟ dae = $\frac{1}{2}$R, ∟ dea = R, gemacht worden, so ist das Dreieck aed ein gleichschenkliches; daher ae + eb = de + eb = s.

89. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn eine Kathete, gleich m, und die Summe der andern Seiten, gleich s, gegeben sind. Fig. 122.

Auflösung. Mache ac gleich m, ad normal ac und gleich s, ziehe cd und errichte in deren Mitte h eine Normale, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da ad = ab + bd = s, so kam es darauf an, mit dem Theil bd ein gleichschenkliches Dreieck zu bilden. Da dieses nach 31. bei dem Dreieck bcd geschehen ist, so hat man auch ab + bc = s.

90. Man soll ein rechtwinkliches Dreieck bilden, wenn eine Kathete gleich m und die Differenz gleich d′ der andern Seiten gegeben sind. Fig. 123.

Auflösung. Man nehme den Schenkel ab eines rechten Winkels gleich m, den andern bd gleich d′, verlängere letztern nach c, ziehe ad und errichte in deren Mitte e eine Normale. Wo diese die Verlängerung db in c schneidet, da ist der Eckpunkt des gesuchten Dreiecks bac.

Beweis. In dem gleichschenklichen Dreieck dac ist ac = cd = bc + bd = bc + d′, oder ac — bc = d′.

91. Es ist die Differenz der Katheten gleich d′ und ein Winkel α gegeben, man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 124.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel gbc gleich α, trage auf einen Schenkel die Differenz d′ in ba, errichte in a eine Normale und halbire den Winkel eac durch ag. Fällt man noch aus dem Durchschnittspunkt g die Normale gc, so ist bcg das verlangte Dreieck.

Beweis. Da ∟ gac = $\frac{1}{2}$R, ∟ acg = R, so ist das Dreieck acg ein gleichschenkliches und es ist

bc — ac = ab, oder bc — cg = d′.

92. Zur Construction eines rechtwinklichen Dreiecks ist die Hypotenuse, gleich h, und die Differenz der spitzen Winkel, gleich δ, gegeben. Fig. 125.

Auflösung. Man nehme ab gleich h, errichte in b eine Normale bf, und trage an diese einen Winkel gbf,

gleich δ, halbire das Complement gba durch bm und fälle aus a eine Normale am auf bm. Das Dreieck abm ist das verlangte.

Beweis. $\llcorner mba + mab = R = \llcorner fba$

$$\llcorner fba - \delta = \llcorner gba$$

daher $\frac{1}{2}(fba - \delta) = \frac{1}{2}\llcorner gba = mba;$

und substituirt man

$$\frac{1}{2}(fba - \delta) + \llcorner mab = \llcorner fba$$

so ergiebt sich auch

$$\llcorner mab = \frac{1}{2}(fba + \delta)$$

Fig. 126. 93. Es ist die Summe s einer Kathete und der zur Hypotenuse gehörigen Höhe, und ein Winkel α gegeben, man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung. Man mache mn gleich s und den Winkel pmn gleich α, errichte in n eine Normale np, welche den Schenkel mq in p schneidet, halbire den Winkel mpn durch pr und ziehe rq parallel np, so ist mrq das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nimmt man pr als Durchmesser eines Kreises, so wird, weil der Winkel pnr = R, der Punkt n in dessen Peripherie fallen, und der Winkel rop wird ebenfalls ein rechter sein. Das Dreieck rop ist aber congruent dem Dreieck rnp, daher or gleich rn; und da ro normal, also die Höhe auf die Hypotenuse ist, so hat man

$$mr + or = mr + rn = s.$$

Fig. 127. 94. Von einem rechtwinklich gleichschenklichen Dreieck ist der Umfang, gleich u, bekannt, man soll das Dreieck selbst zeichnen.

Auflösung. Da das Dreieck ein rechtwinklich gleichschenkliches sein soll, so wird es jedem, nach Aufgabe 81, construirten ähnlich sein. Construirt man also über der Gegebenen u ein solches Dreieck, so wird es darauf ankommen, zwei andere gleichschenkliche Dreiecke dqo und cpo so zu bilden, daß die gleichen noch unbestimmten Stücke dp und cp auf cd Schenkel dieser Dreiecke werden. Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke dnc und qop (unter letzterm das gesuchte gedacht) ist aber qo parallel dn, also $\llcorner doq = odn = odq$. Man hat also, um die beiden gleichschenklichen Dreiecke zu zeichnen, die Winkel ndc und ncd zu halbiren und qo parallel dn, po parallel cn zu ziehen, um das gesuchte Dreieck qop zu erhalten.

Fig. 128. 95. Zur Construction eines rechtwinklichen Dreiecks sind zwei Transversalen pq und mn auf die Mitten der Katheten gegeben.

Auflösung. Man ziehe auf eine Gerade cg eine Normale ab, trage $\frac{1}{2}$ pq in bf und schneide aus f, mit einem Radius gleich mn, die Richtung cg in g und aus einem, auf ab beliebig genommenen Punkte k, mit einem Radius, gleich 4 . bk, dieselbe in l. Ziehe ferner gh parallel kl, schneide aus dem Durchschnittspunkte h, mit einem Radius, gleich $\frac{1}{2}$ pq, die Richtung cg in e, mache bc gleich 2 . be und ba gleich 4 . bh, so ist bca das verlangte Dreieck.

Beweis. Man nehme bd = 2 . bh = $\frac{1}{2}$ ab, ziehe cd und ae, so ist, da auch bc = 2 . be, cd parallel eh und daher cd = 2 . eh = pq, wie verlangt worden ist.

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke hgb und klb ist auch gh = 4 . bh = ab, daher

$gb_q = gh_q - bh_q = ab_q - bh_q$, nach 47.
und weil $ae_q = ab_q + be_q$
und $he_q = bh_q + be_q$
also $ae_q - he_q = ab_q - bh_q$,
so hat man $gb_q = ae_q - he_q$.

Nun ist aber auch

$gb_q = gf_q - bf_q = gf_q - he_q$,
weil nach der Constr. bf = $\frac{1}{2}$ pq = he ist,
folglich $ae_q - he_q = gf_q - he_q$
oder ae = gf
und da nach der Constr. gf = mn
auch ae = mn.

96. Es ist die Hypotenuse gleich h gegeben, und die Katheten sollen sich verhalten wie m : n, man soll das Dreieck zeichnen. Fig. 129.

Auflösung. Man bilde ein rechtwinkliches Dreieck a b′ c′, dessen Katheten das gegebene Verhältniß haben, verlängere die Hypotenuse und mache b′d gleich h, ziehe cd parallel ab′ und bc parallel b′d, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Aus 36, 58.

97. Es ist eine Kathete gleich q und deren Projection gleich p auf der Hypotenuse gegeben, man soll das Dreieck zeichnen. Fig. 130.

Auflösung. Man ziehe beliebig ab, und bd normal ab, mache bc gleich p und schneide aus c, mit einem Radius gleich q, die Normale in d, ziehe cd, errichte in deren Mitte m eine Normale mn; so wird diese die Richtung ac in n schneiden und n der Mittelpunkt eines Kreises vom

Radius cn sein, welcher in a die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks acd bestimmt.

Beweis. Aus 83, 89.

Fig. 131. 98. Die Hypotenuse sei gleich h und die Bedingung gegeben, daß die Seiten eine stetige Proportion bilden; man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Man theile die Hypotenuse, nach Aufgabe 41., in das äußere und mittlere Verhältniß, indem man bd normal ab und gleich $\frac{1}{2}$ ab macht, aus d den Bogen be und aus a den ef beschreibt.

In dem Theilpunkte f errichte man eine Normale fg, beschreibe über ab einen Halbkreis und verbinde g mit b und a. Das Dreieck abg wird die gegebenen Bedingungen enthalten.

Beweis. Nach der Construction hat man

$$ab : af = af : bf$$

oder $$ab \,.\, bf = af_q$$

Nach 62. ist

$$bf : bg = bg : ab, \text{ I.}$$

und auch $$af : ag = ag : ab, \text{ II.}$$

aus I. folgt $$ab \,.\, bf = bg_q$$

daher ist $$af_q = bg_q$$

oder $$af = bg$$

und durch Substitution in II.

$$bg : ag = ag : ab.$$

Anmerkung. Aus af = bg ersieht man, daß die Auflösung auch so geschehen kann, daß man zuerst die Theilung von ab nach dem äußern und mittlern Verhältniß construirt und dann af als Sehne in bg trägt.

Fig. 132. 99. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn dessen Umfang gleich u und ein spitzer Winkel γ gegeben sind.

Auflösung. Nimmt man eine Gerade ab gleich u, so läßt sich diese in drei Theile zerlegt denken, welche gleich den Seiten des gesuchten Dreiecks sind. Jeder der beiden äußern Theile und die anliegende Seite des Dreiecks können nun als Schenkel von gleichschenklichen Dreiecken betrachtet werden, wovon das eine ein rechtwinkliches sein wird.

Errichtet man daher in a eine Normale ag, so ist diese und das anliegende Stück von ab als die Richtungen von den Seiten eines noch unbestimmten Quadrats anzusehen, so daß die Linie ac, unter der Neigung von $\frac{1}{2}$ R gelegt, die Richtung der Diagonale giebt. Auf der andern Seite bildet sich, wenn man den Winkel fba = γ macht, ein Rhombus, dessen Diagonale den Neigungswinkel $\frac{1}{2}\,\gamma$ hat

und sich mit ac in der Spitze des gesuchten Dreiecks schneiden wird; die andere Diagonale ef aber geht durch die Mitte von bc rechtwinklich. Die fehlende Kathete ergiebt sich durch eine Normale cd aus c.

100. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die Hypotenuse, gleich m, und die Bedingung gegeben ist, daß das Rechteck aus den Katheten gleich sei dem Quadrate ihrer Differenz. Fig. 133.

Auflösung. Mache ab gleich m, beschreibe darüber einen Halbkreis, errichte in b eine Normale be, gleich $\frac{1}{3}$ ab, ziehe ef parallel ab, so schneidet diese in f die Spitze des rechten Winkels vom verlangten Dreieck.

Beweis. Das Dreieck afg ist ähnlich dem Dreieck bfg, daher ist

$$af : ab = fg : bf$$

und auch $3 \cdot af : ab = 3 \cdot fg : bf$

weil aber $fg = \frac{1}{3} ab$

so wird $3 \cdot af : ab = ab : bf$

$\llcorner afb = R$

also $ab_q = af_q + bf_q$

und $3 \cdot af \cdot bf = af_q + bf_q$

zerlegt man $3\,ab \cdot bf$ in $af \cdot bf + 2\,af \cdot bf$

so ergiebt sich $af \cdot bf = af_q + bf_q - 2\,af \cdot bf$

d. i. $= (af - bf)_q$

101. Es soll ein rechtwinkliches Dreieck construirt werden, wenn die Summe der Katheten, gleich s, und die Differenz der spitzen Winkel, gleich δ, gegeben ist. Fig. 134.

Auflösung. Auf einer beliebigen Richtung ab errichte man in b eine Normale, trage an diese den Winkel nbo $= \delta$ und halbire das Complement oba durch bk. Die Neigungswinkel dieser Halbirungslinie giebt den Winkel α des Dreiecks und sie selbst die Richtung der Dreiecksseite. Nun mache man bk $=$ s, bilde in k einen rechten Winkel lkb, halbire diesen durch ka, so wird die Seite ma eines gleichschenklichen Dreiecks kam, dessen Winkel bei m gleich R ist, zugleich Seite des gesuchten Dreiecks sein.

Beweis. $2\alpha + \delta = R$, durch Constr.

$$\alpha + \gamma = R$$

daher $2\alpha + \delta = \alpha + \gamma$

und $\delta = \gamma - \alpha$

Da ferner $\beta = \frac{1}{2} R = \llcorner mak$ und $\llcorner bma = R$ } durch Constr.

so ist das Dreieck bma ein rechtwinkliches, und

$$bm + mk = bm + ma = s.$$

Fig. 135. 102. Ein rechtwinkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die Differenz der Katheten, gleich d, und die der spitzen Winkel, gleich δ, gegeben ist.

Auflösung. Auf eine beliebige Richtung trage in no die gegebene Differenz d, suche wie bei der vorigen Aufgabe den Winkel α, errichte os normal und halbire den rechten Winkel durch or. Der Durchschnitt dieser Halbirungslinie mit dem Schenkel np von α giebt die Spitze p des Dreiecks, welches noch durch die Normale pq zu ergänzen ist.

Beweis. nq hat die Summanden oq + on d. i. pq + d. Da nun der Winkel pqn = R, so muß in dem gleichschenklichen Dreieck opq jeder Winkel an der ungleichen Seite gleich $\frac{1}{2}$ R sein, u. s. w.

Fig. 136. 103. Zur Construction eines rechtwinklichen Dreiecks sind gegeben die Differenz der Hypotenuse und Kathetensumme, gleich d, und einer der spitzen Winkel α.

Auflösung. Trage die gegebene Differenz in bp und in cba den Winkel α, errichte in p eine Normale pq und lege an diese einen Winkel qpc = α, dessen Schenkel den des zuerst gebildeten Winkels α in c schneiden wird. Aus c beschreibe man mit dem Radius cp einen Bogen, welcher den Schenkel bm in a schneidet, und verbinde a, c, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. $\llcorner$cpb = R + α, durch Constr.
$\llcorner$bcp = R — 2α
und das Supplement cpa = R — α.

Da nun das Dreieck pac gleichschenklich gemacht ist, so ist $\llcorner$pca = 2α, also der Winkel acb ein rechter, wie verlangt worden.

Ferner ist ab = ap + d
und, wie in der Aufgabe bestimmt ist,
d = (bc + ac) — ab
also ab = bc + ac — d
daher ap + d = bc + ac — d
und die Katheten Summe bc + ac = ap + 2d

Bildet man den Ausdruck rechts dadurch, daß man an ab die Differenz nochmals in am trägt, so wird bm gleich der Kathetensumme, und diese weniger der Hypotenuse ab gleich der Differenz sein. Die Seiten des construirten Dreiecks abc entsprechen also den Forderungen.

Fig. 137. 104. Ein rechtwinkliches Dreieck zu construiren, wenn ein spitzer Winkel φ und die Differenz, gleich d, einer Kathete und der zur Hypotenuse gehörigen Höhe gegeben sind.

Auflösung. Man bilde einen Winkel gah gleich φ und trage auf den einen Schenkel am = d, in m aber ei-

nen Winkel bmn = $\frac{1}{2}$ (R + φ). In dem Durchschnittspunkte n seines Schenkels mit ah errichte eine Normale und in dem b dieser Normale mit ag eine zweite bc. Dadurch ergiebt sich in abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. $\llcorner$nba = R — φ,
und da $\llcorner$bmn = $\frac{1}{2}$ (R + φ) gemacht worden,
so ist auch $\llcorner$bnm = $\frac{1}{2}$ (R + φ) und das Dreieck mbn ein gleichschenkliches, worin bm = bn und zugleich die Höhe auf ac ist, weil bn normal ac. Man hat also ba — bm = ba — bn = am = d, wie verlangt ist.

C. Gleichseitige und gleichschenkliche Dreiecke betreffend.

105. Ueber einer, als Seite gegebenen Linie ab ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. Fig. 138.

Auflösung. Man nehme ab als Radius und beschreibe aus den beiden Endpunkten Bogen, in deren Durchschnitt c die Spitze des Dreiecks gefunden ist.

Beweis. Aus 76.

106. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Höhe gleich m ist.

Auflösung. Bilde ein beliebiges gleichseitiges Dreieck cfh, fälle aus einer Spitze c eine Normale auf die Gegenseite, mache jene gleich m, ziehe durch den Fußpunkt d eine Parallele mit hf und verlängere nöthigenfalls die Seiten ch, cf, so ist abc das gesuchte Dreieck. Fig. 139.

Beweis. Aus 12, 58.

107. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe einer Seite und Höhe, gleich s, gegeben ist. Fig. 140.

1. Auflösung. Mache ab gleich s und beschreibe darüber einen Halbkreis, trage den Radius als Sehne von a nach m, ziehe die Richtung am und verbinde m mit dem Mittelpunkt c. Aus m fälle die Normale mz und trage diese von c nach n. Nun suche zu an, ac und ab die vierte Proportionale, trage diese in aq und ziehe qr parallel cm, daß sie die Richtung am in r schneide, so ist aqr das verlangte Dreieck.

Beweis. Da am = ac = $\frac{1}{2}$ ab, so ist das Dreieck amc gleichseitig und dem zu suchenden ähnlich; es ist daher, wenn man die Seite des ersten Dreiecks mit a, dessen Höhe mit h und diese Linien des zu suchenden Dreiecks mit a′ und h′ bezeichnet, wonach s = a′ + h′ sein soll,

$$a : a' = h : h', \text{ nach } 60$$
oder
$$a : h = a' : h'$$
und auch
$$a + h : a = a' + h' : a'.$$

Nach der Construction war aber

$$an : ac = ab : aq$$

oder $\quad ac + mz : ac = ab : aq$

also auch $\quad ac : mz = aq : ab - aq$

d. i. $\quad ac : mz = aq : bq$

Es ist also $bq = h'$, gleich der Höhe des gesuchten Dreiecks und $aq + bq = aq + ry = s$.

Fig. 141. 2. Auflösung. Man bilde einen Winkel bae, gleich $\frac{2}{3}$ R, und mache ae = s. Auf ab fälle man aus e eine Normale ed, halbire den Winkel dea durch eg, ziehe cg parallel de und ergänze mit der dadurch abgeschnittenen Seite ac das gesuchte Dreieck.

Beweis. $\quad \llcorner bac = \frac{2}{3} R$

$\quad \llcorner ade = R$

daher $\quad \llcorner dea = \frac{1}{3} R$

und $\quad \llcorner gea = \frac{1}{6} R$

Ferner ist, nach 12, $\quad \llcorner gca = dea = \frac{1}{3} R$

also $\quad \llcorner gce = \frac{5}{3} R$

und das Dreieck gce ein gleichschenkliches.

Da nun cg normal ab, so ist solche die Höhe des Dreiecks, und $ac + ce = ac + cg = s$.

Fig. 142. 3. Auflösung. Man zeichne ein beliebiges gleichseitiges Dreieck cmn und ziehe dessen Höhe cp, verlängere eine Seite cm, mache mo gleich der Höhe cp, trage in cg die gegebene Summe, gleich s, ziehe dann op und mit ihr parallel gd. Zieht man noch durch den Durchschnitt d die Linie ab parallel mn, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Dreiecke mop und agd sind ähnlich, man hat daher

$$mo : pm = ag : ad$$

und $\quad mo : 2pm = ag : 2ad$

d. i. $\quad mo : cm = ag : ac$, I.

Ferner ist das Dreieck cop ähnlich dem Dreieck cgd, und weil $\quad mo = cp$, so ist

$$co : mo = cg : cd, \text{ II.}$$

Aus I und II folgt

$$co : cm = ag . cg : ac . cd$$

und da auch $\quad co : cm = cg : ac$

so ist $\quad ag . cg : ac . cd = cg : ac$

d. i. $\quad ag : cd = 1 : 1$.

Es ist also $ag = cd$, und $ac + ag = ac + cd = s$.

108. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, wenn die Differenz, gleich d, einer Seite und Höhe gegeben ist.

Fig. 143. Auflösung. Man bilde einen Winkel abc gleich $\frac{2}{3}$ R, trage aus b nach m die gegebene Differenz d, errichte in

m eine Normale mn, mache op gleich om und trage bp nach pa. Man erhält dadurch in ab die Grundlinie, und in p den Fußpunkt der Normale, welche durch die Spitze des Dreiecks gehen und in dieser den Schenkel des zuerst gebildeten Winkels, in c, schneiden wird.

Beweis. Der Winkel abc gehört einem gleichseitigen Dreieck an. Auf dessen Schenkel bc muß eine Linie gedacht werden können, welche zur Differenz, gleich bm, addirt, die Seite des Dreiecks giebt und die also der Höhe gleich ist. Diese Linie muß aber Radius eines Bogens sein, der durch den Fußpunkt der Höhe und durch m gelegt werden kann, und dessen Mittelpunkt in der Spitze c des Dreiecks liegt. Die Seite ab wird also Tangente des Bogens im Berührungspunkt p, und dieser Punkt wird, nach 95, leicht dadurch bestimmt, daß die Tangente po in p, gleich der Tangente mo in m gleich gemacht wird, u. s. w. aus 78.

109. In ein gleichseitiges Dreieck abc ein anderes gleicher Gattung zu zeichnen, dessen Seiten normal auf den Seiten des erstern stehen. Fig. 144.

Auflösung. Man trage $\frac{1}{3}$ ac gleichartig auf die drei Seiten, nemlich von a nach o, von c nach n und von b nach m, verbinde diese drei Punkte, so hat man das verlangte Dreieck.

Beweis. Zieht man pm parallel ac, so ist das Dreieck bmp ein gleichseitiges, also der Winkel bmp $= \frac{2}{3}$ R. Da np $=$ pm $= \frac{1}{3}$ ac, so wird das Supplement mpn $= \frac{4}{3}$ R und jeder Winkel an der ungleichen Seite des gleichschenklichen Dreiecks mnp gleich $\frac{1}{3}$ R, also $\llcorner$bmp $+$ pmn $= \llcorner$bmn $=$ R sein.

Es sind aber die drei Ergänzungsdreiecke congruent, also auch $\llcorner$moa $=$ onc $=$ R, und das innere Dreieck gleichseitig.

110. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die ungleichen Seiten ab, und bc $=$ m gegeben sind. Fig. 145.

Auflösung. Aus den Endpunkten der ungleichen Seite ab beschreibe man mit einem Radius, gleich m, Bogen bei c und ziehe ac, bc.

Beweis. Leicht.

111. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, in welchem jeder Winkel an der ungleichen Seite doppelt so groß ist, als der Winkel an der Spitze, die gleiche Seite aber gleich m ist.

1. Auflösung. Ziehe ab gleich m und theile sie nach Aufgabe 41. in das äußere und mittlere Verhältniß; be- Fig. 146.

schreibe aus b einen Bogen, der durch a geht, trage bg als Sehne in af und ziehe bf, so ist das Dreieck abf das gesuchte.

Beweis. Da nach der Construction

$$ab : \left\{ \begin{matrix} bg \\ af \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} bg \\ af \end{matrix} \right\} : ag$$

so ist, nach 109, af die Seite eines regulären Zehnecks. In einem solchen ist aber der Mittelpunktswinkel gleich $\frac{2}{5}$R, folglich jeder der beiden übrigen Winkel im Dreieck abf gleich $\frac{4}{5}$ R.

Fig. 147. 2. Auflösung. Man bilde ein gleichschenkliches Dreieck abc der in voriger Auflösung angegebenen Gattung, verlängere ac, bc, mache cf gleich m und ziehe fg parallel ab.

Beweis. Wie bei Auflösung 1, und aus 12, 59.

Fig. 148. 112. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, in welchem jeder äußere Winkel an der ungleichen Seite, nemlich α oder δ gleich $\frac{3}{2}$ ε ist.

Auflösung. Diese Forderung erfüllt jedes rechtwinkliche Dreieck, dessen Katheten gleich sind; so daß also die Spitze des rechten Winkels auf der Normale liegt, die man auf der Mitte der Hypotenuse errichtet, und die gleich der halben Hypotenuse ist.

Beweis. Leicht.

113. Ein gleichschenkliches Dreieck aus einer gegebenen Seite, gleich m′, und einer der Höhen, gleich n′, zu bilden.

Es können hierbei folgende vier Fälle stattfinden.

1. Fall. Wenn die ungleiche Seite gleich m′ sein, und die Höhe n′ von einem ihrer Endpunkte ausgehen soll.

Fig. 149. Auflösung. Beschreibe aus b mit einem Radius, gleich n′, einen Bogen pmn. An diesem muß die Richtung der Seite ac Tangente sein, daher der Winkel bma ein rechter werden. Man beschreibe über ab einen Halbkreis; dieser schneidet in m den Berührungspunkt, weil der Winkel bma = R ist, so daß am die Richtung der Seite ac wird und man das gesuchte Dreieck auf verschiedene Weise ergänzen kann.

Beweis. Leicht.

2. Fall. Wenn die gleiche Seite gleich m sein soll und die Höhe, gleich h, auf die ungleiche Seite gegeben ist.

Fig. 150. Auflösung. Errichte auf einer Geraden rs eine Normale oc, gleich h, beschreibe aus deren Endpunkte c mit einem Radius, gleich m, einen Bogen, der die Gerade in

zwei Punkten a, b, den Eckpunkten des gesuchten Dreiecks schneiden wird.

Beweis. Leicht.

3. Fall. Es soll die ungleiche Seite gleich m und die Höhe auf ihr gleich h sein. Fig. 150.

Auflösung. Aus 31.

4. Fall. Wenn die gleiche Seite gleich m′ und die Höhe auf ihr gleich h sein soll. Fig. 151.

Auflösung. Errichte auf einer Geraden ce eine Normale bm, gleich m′, schneide aus ihrem Endpunkte b, mit einem Radius, gleich m′, die Richtung ce in d und aus d in a, so ist adb das verlangte Dreieck.

Beweis. Leicht.

114. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wenn dessen ungleiche Höhen h und h′ gegeben sind.

Auflösung. Errichte auf einer Geraden die Normale ab gleich h, so ist a die Spitze des gesuchten Dreiecks und b der Fußpunkt der Höhe. Aus a beschreibe mit dem Radius ab einen Bogen, trage in bl eine Sehne, gleich h′, halbire diese in m und ziehe die Richtung am, so erhält man im Durchschnittspunkt c eine zweite Spitze, und, nimmt man bd = bc, in d die dritte Spitze des verlangten Dreiecks. Fig. 152.

Beweis. Nach 31 ist bl normal ac, muß daher parallel der Höhe de auf ac sein. Betrachtet man bl nnd ce als Diagonalen des Vierecks belc, so ist dieses, nach 38 und 36, und weil das Dreieck ble gleichschenklich ist, ein Rhombus; also le parallel und gleich bc = bd. Folglich ist in dem Paralielogramm ledb die Seite bl = de = h′; und da auch ab = h gemacht worden, so ist acd das gesuchte Dreieck.

115. Zur Construction eines gleichschenklichen Dreiecks ist die Höhe, gleich h, aus einem der Winkel an der ungleichen Seite und dieser Winkel selbst gegeben. Fig. 153.

Auflösung. Man errichte auf einer Geraden bq eine Normale nm, gleich h, trage an bq einen Winkel qbc, gleich dem gegebenen α, ziehe om parallel bc durch m und ergänze das Dreieck omq.

Beweis. Leicht.

116. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe, gleich u, einer gleichen und der ungleichen Seite und einer der Winkel gegeben sind.

Es können zwei Fälle statt finden:

1. Fall. Wenn der gegebene Winkel an der unglei-Seite liegt.

Fig. 154. Auflösung. Mache ad gleich u, lege in a einen Winkel bad = α und in d einen dergleichen bda = $\frac{1}{2}\alpha$. Der Durchschnittspunkt der Schenkel bestimmt in b die Spitze des gesuchten Dreiecks, und der Durchschnitt c eines, aus b mit dem Radius ab beschriebenen Bogens den dritten Eckpunkt des Dreiecks.

Beweis. Nachdem ad gleich ac + bc = u gemacht und die Seite ab, durch den Winkel α, der Richtung nach bestimmt worden ist: so muß sich ein gleichschenkliches Dreieck dcb denken lassen, dessen gleiche Seite der Summand cd = bc ist; und worin der Winkel an der Spitze c dem Supplement von α gleich sein muß. Dessen gleiche Winkel sind dann gleich $\frac{1}{2}\alpha$ und die Ecke b des gedachten Dreiecks wird nothwendig mit der Spitze b des gesuchten zusammenfallen.

Fig. 155. 2. Fall. Wenn der gegebene Winkel der ungleichen Seite gegenliegt.

Auflösung. Man trage die gegebene Summe, gleich u, in oa, in a einen Winkel qap, gleich dem gegebenen β und in nop das Complement zu $\frac{1}{2}\beta$. Halbire letzteres und auch den Supplementswinkel qao, so werden diese Halbirungslinien sich in der Spitze b des gesuchten Dreiecks abc schneiden und die Ergänzung desselben möglich machen.

Beweis. Da der Winkel an der Spitze gleich β sein soll, so muß jeder andere des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}$ (2R — β) werden. Diesen Ausdruck bildet man leicht in der Hälfte des Supplements qao.

Auf der andern Seite ist derselbe Ausdruck in dem Winkel nop, jedoch in der Form R — $\frac{1}{2}\beta$ gebildet worden. Der Schenkel no muß also parallel der Dreiecksseite bc sein und, nach 36, die Halbirungslinie ob als Diagonale eines Parallelogramms, und zwar eines Rhombus betrachtet werden können; wodurch bc = co wird, und es ist ac + co = ac + bc = u.

117. Zur Construction eines gleichschenklichen Dreiecks sind gegeben: die Differenz der ungleichen und gleichen Seite, gleich d′, und der Winkel an der Spitze, gleich φ.

Diese Aufgabe bietet zwei Fälle:

1. Fall. Wenn der gleiche Schenkel größer als die ungleiche Seite ist.

Fig. 156. Auflösung. Man trage auf die Schenkel des Winkels φ die Differenz, gleich d′, in cd und ce, ziehe de, halbire den Winkel eda und ziehe durch den Durchschnittspunkt

b mit de eine Parallele ab, so ist letztere die Grundlinie des gesuchten Dreiecks abc.

Beweis. Leicht.

2. Fall. Wenn der gleiche Schenkel kleiner als die ungleiche Seite ist.

Auflösung. Man bilde, wie vorhin, das gleichschenkliche Dreieck bde, verlängere de und mache df gleich 2 d′, halbire df in m und ziehe die Richtung bm, fc parallel bm und durch den Durchschnitt c noch ac parallel df. Das Dreieck abc ist das verlangte. Fig. 157.

Beweis. Die Neigung der Seiten ba, bc ist durch den Winkel φ gegeben. In dem Dreieck abg hat man

$$bd : dm = ab : ag$$

d. i. weil $dm = \frac{1}{2} df = \frac{1}{2} . 2 d' = d'$

$$d' : d' = ab = ag$$

also ist $ab = ag$

In dem Parallelogramm cfgm ist

$$cg = mf = d'$$

folglich $ac = ab + d'$ oder $ac - ab = d'$.

118. Die Differenz d der ungleichen und einer gleichen Seite, nebst dem Winkel α an der ungleichen Seite sind gegeben; man soll das gleichschenkliche Dreieck construiren.

Hierbei treten wieder die beiden Fälle der vorigen Aufgabe ein:

1. Fall. Wenn der gleiche Schenkel größer als die ungleiche Seite ist.

Auflösung. Bilde ein gleichschenkliches Dreieck abc, in welchem jeder Winkel an der ungleichen Seite gleich α und ein gleicher Schenkel gleich d ist. Fig. 158.

Trage ab in cm, ziehe bm und mit dieser parallel cn. Wo letztere die Verlängerung von ab (in n) schneidet, da ist eine Ecke des verlangten Dreiecks, indeß a die zweite ist, so daß das Dreieck leicht ergänzt werden kann.

Beweis. In dem Dreieck aon ist, weil on parallel bc,

$$ao : an = ac : ab, \text{ I.}$$

und $ao - an : ao = ac - ab : ac$

oder $ao - an : ao = am : ac, \text{ II.}$

In dem Dreieck acn hat man

$$an : ac = ab : am, \text{ III.}$$

Aus I × III ergiebt sich

$$ao : ac = ac : am, \text{ IV}$$

und aus II × IV

$$ao - an : ac = am : am$$

also ist $ao - an = ac = d.$

2. Fall. Wenn die ungleiche Seite die größere ist.

Fig. 159. Auflösung. Man bilde über ab = d ein gleichschenkliches Dreieck abc, dessen Winkel an der Grundlinie gleich α sind, verlängere ab nach n, halbire den äußern Winkel cbn durch bo, so ist der Durchschnittspunkt o der verlängerten ac mit der Halbirungslinie die Spitze des gesuchten Dreiecks.

Beweis. Um das Dreieck zu ergänzen hat man on parallel bc zu ziehen. Das Dreieck hat also die Winkel bei a und n gleich α und es bleibt noch nachzuweisen, daß ao = bn, oder, daß an — ao = d ist.

Es ist aber nach 13. $\angle$ cbo = bno = obn
also das Dreieck onb ein gleichschenkliches, und weil on = ao,
so ist auch ao = bn,
und an — bn = an — ao = ab = d.

119. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe der drei Seiten, gleich s, und die Höhe auf die ungleiche Seite, gleich h, gegeben sind.

Fig. 160. Auflösung. Ziehe ed = s, errichte in deren Mitte eine Normale bc, gleich der gegebenen Höhe h, verbinde b, e und b, d und ziehe in den Mitten r und s Normalen, so schneiden diese in q und p die Seite pq des gesuchten Dreiecks ab.

Beweis. Durch bc = h ist die Spitze des gleichschenklichen Dreiecks bestimmt. Die Linie ed oder s muß aus den Summanden bestehen: bq + qp + pb, wovon bq = pb ist. Es ist also eq = bq und pd = pb zu machen, oder es sind auf be und bd gleichschenkliche Dreiecke zu bilden, deren eine gleiche Seite in de fällt.

Nach 31. muß die Spitze eines solchen in der Normale rq, zugleich nach Obigen aber in der Richtung de liegen; daher kann kein anderer als der Durchschnittspunkt q die Spitze eines solchen Dreiecks und zugleich ein Begrenzungspunkt der ungleichen Seite pq sein.

Fig. 160. 120. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wenn der Umfang, gleich s, und ein Winkel α gegeben sind. Je nach der Lage des Winkels α im Dreieck sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall. Wenn der gegebene Winkel der ungleichen Seite gegenliegt.

Auflösung. Man construire ein gleichschenkliches Dreieck mno, dessen Winkel an der Spitze gleich α ist, verlängere die ungleiche Seite nach entgegengesetzten Richtungen, fälle aus o eine Normale und trage von dem Fußpunkt c aus die halbe Summe s nach d und e. In d lege man

einen Winkel, gleich β des Hülfsdreiecks, welches leicht geschieht, wenn man ad parallel on zieht. Halbirt man diesen, so schneidet die Halbirungslinie ds auf der verlängerten Normale in b die Spitze des gesuchten Dreiecks, so daß die Parallelen bp und bq mit on und om das gesuchte Dreieck bestimmen.

Beweis. Da in dem gleichschenklichen Dreieck mno der ungleiche Winkel gleich dem gegebenen α gemacht worden, so ist es dem verlangten ähnlich; es müssen sonach auch die gleichen Winkel beider Dreiecke gleich werden. Die Fortsetzung des Beweises stimmt im übrigen mit dem vorigen, nur daß hier die Winkel in Beziehung kommen.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich noch auf verschiedene andere Weise lösen. Bildet man z. B. einen Winkel b, gleich $R + \frac{1}{2}\alpha$, halbirt ihn durch bc, errichtet auf letztere eine beliebige Normale fg gleich $\frac{1}{2}$ s und zieht ge parallel bc, so erhält man das Dreieck deb der vorhergehenden Figur und hat dann weiter zu operiren, um die Ecken p, q abzuschneiden; welches durch die Normalen auf den Mitten der gleichen Seiten geschehen wird.

2. Fall. Soll der Winkel an der ungleichen Seite liegen, und gleich β sein, so hat man nicht nöthig ein Hülfsdreieck zu bilden, sondern macht unmittelbar den Winkel ade gleich β, und bde gleich $\frac{1}{2}\beta$.

D. Ungleichseitige Dreiecke betreffend.

121. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Höhe gleich h und zwei Seiten m und n gegeben sind.

1. Fall. Wenn die gegebene Höhe einer der gegebenen Seiten zugehört. Fig. 161.

Auflösung. Auf einer Geraden bd, gleich m, errichte eine Normale cd, mache sie gleich h und ziehe ce parallel bd. Schneidet man ce aus b mit einem Radius gleich n in f, so ist der Durchschnittspunkt die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks.

Beweis. Aus 18 folgt, daß ce der Ort für die Spitzen aller Dreiecke ist, die h zur Höhe haben. Desgleichen ist der Bogen ik ihr geometrischer Ort in Bezug auf die Seite gleich n, nach 76, folglich muß der Durchschnittspunkt f den Bedingungen entsprechen.

2. Fall. Wenn die gegebenen Stücke in der Spitze f convergiren.

Auflösung. Die gegebenen Stücke sind dann nicht völlig bestimmend, und lassen drei Dreiecke zu, wovon zwei congruent sind. Die ungleichen sind Dreieck bfd und bfg.

Fig. 162. 122. Es soll ein Dreieck construirt werden, wozu gegeben sind: zwei Seiten y und z und die zu z gehörige Höhe x.

Auflösung. Auf einer Geraden nu errichte eine Normale op, gleich x, wodurch ein Eckpunkt p des Dreiecks bestimmt ist. Schneide aus diesem mit einem Radius, gleich y, die Richtung nu in w oder v und aus einem der letztern Punkte, mit einem Radius gleich z die Gerade in m.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß es vier Dreiecke giebt, welche die gegebenen Stücke enthalten, aber nur paarweise congruent sind.

Fig. 163. 123. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, worin eine Seite gleich a, deren zugehörige Höhe gleich h und ein an a liegender Winkel gleich α sein soll.

Auflösung. Man ziehe zwei Parallelen bd und mc, deren normaler Abstand gleich h ist. An bd trage man den Winkel cdb $= \alpha$ und mache db gleich a. Man hat dadurch das gesuchte Dreieck bdc völlig bestimmt.

Beweis. Leicht.

Fig. 164. 124. Man soll ein Dreieck bilden, wenn eine Seite gleich m, ein anliegender Winkel gleich α und die Höhe aus der Spitze dieses Winkels gleich h gegeben sind.

Auflösung. Ueber ac $=$ m beschreibe einen Halbkreis, trage in a einen Winkel bac $= \alpha$ und die Höhe h als Sehne ad in den Kreis. Zieht man die Richtung cd bis zum Durchschnitt b, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Aus 89.

Fig. 165. 125. Zur Construction eines Dreiecks ist gegeben: eine Seite gleich a, die zugehörige Höhe gleich b und der Winkel α, welcher der Seite a gegenliegt.

Auflösung. Man ziehe cd $=$ a, errichte in der Mitte n eine Normale nm $=$ b und ziehe vw parallel cd durch m. An cd trage einen Winkel cdg $= \alpha$ und errichte in d auf dg die Normale dk. Nimmt man den Durchschnitt k als Mittelpunkt und beschreibt mit dem Radius kd einen Kreis, so geht dieser durch c und schneidet auf vw den dritten Eckpunkt p oder q des gesuchten Dreiecks cdp oder cdq.

Beweis. Da dk normal dg und Radius des Kreises ist, so ist, nach 77, dg Tangente des Kreises; daher ist, nach 90, $\llcorner$cpd $=$ cdg $= \alpha$. Nach 18 hat auch das

Dreieck die gegebene Höhe, enthält also alle Bedingungen der Aufgabe.

126. Man soll ein Dreieck zeichnen, wozu eine Seite gleich m, der gegenliegende Winkel α und die zu einer andern Seite gehörige Höhe, gleich h, gegeben sind. Fig. 166.

Auflösung. Mache ab gleich m, beschreibe über sie einen Halbkreis, lege in diesen eine Sehne ad, gleich der gegebenen Höhe h und ziehe die Richtung bd.

In einem beliebigen Punkte auf bd bilde man den Winkel bfg = α und ziehe mit dem Schenkel fg die Parallele ac durch a. Das Dreieck abc ist das verlangte.

Beweis. Aus 89, 12.

127. Es soll ein Dreieck construirt werden, wenn eine Seite gleich a, die ihr zugehörige Höhe gleich b und noch eine Höhe gleich c auf eine andere Seite gegeben sind. Fig. 167

Auflösung. Ueber df = a beschreibe einen Halbkreis, trage in diesen die Sehne dn, gleich c, und ziehe die Richtung fn; errichte auf df beliebig eine Normale, mache sie gleich b und ziehe durch den Endpunkt g eine Parallele mit fd. Wo diese die Richtung fn schneidet, da ist die dritte Spitze k des gesuchten Dreiecks.

Beweis. Aus 89, 18.

Anmerkung. Trägt man die Sehne dn, gleich c, in einen unterhalb fd beschriebenen Halbkreis, zieht die Richtung fn und eine Normale fg, gleich b, gk parallel fd, so erhält man das Dreieck fdk, welches ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Fig. 168.

128. Man soll ein Dreieck construiren, wenn eine Seite gleich a und die Höhen b und c auf den andern Seiten gegeben sind. Fig. 169.

Auflösung. Ziehe df, gleich a, und über sie einen Halbkreis, trage in diesen die Sehnen dh, gleich b, und fg gleich c. Die Richtungen dg und fh sind die der gesuchten Seiten des Dreiecks dfk.

Beweis. Aus 89.

Anmerkung. Trägt man die eine Höhe unterhalb des Durchmessers in den andern Halbkreis, so ergiebt sich ein stumpfwinkliches Dreieck, welches auch die gegebenen Stücke enthält.

129. Es sind zwei Winkel α und β und die Höhe, gleich h, aus der Spitze des dritten Winkels gegeben, man soll das Dreieck construiren. Fig. 170.

Auflösung. Auf eine Gerade mn ziehe man eine Normale oc, gleich h; trage in o einen Winkel don, gleich

α und einen zweiten som, gleich β, ziehe ac parallel do und nc parallel of, so ist acn das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

130. Es sind zwei Winkel ε und δ und die Höhe, gleich h, aus δ gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Fig. 171. Auflösung. Trage an eine beliebige Gerade den Winkel nma, gleich ε, ziehe mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, der die Schenkel in p und a schneidet und durch m geht; verbinde p mit a, trage in ad die gegebene Höhe h und ziehe durch d eine Parallele bc mit mn. Legt man noch in a den Winkel nab, gleich δ, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

Fig. 172. 131. Es soll ein Dreieck construirt werden, wozu ein Winkel γ und die beiden Höhen, gleich h und h′, aus den andern Spitzen gegeben sind.

1. Auflösung. Man bilde einen Winkel bca gleich γ, errichte cq normal ac und gleich h′, und ziehe bq parallel ac. Es wird dadurch eine Spitze b des Dreiecks auf bc geschnitten, und auf gleiche Weise auch die andre a gefunden.

Beweis. Aus 36.

Fig. 173. 2. Auflösung. Man zeichne einen Winkel qbc, gleich γ; ziehe bm normal bq und gleich h′, dann ac parallel bq durch m, so ergeben sich die Seite bc und die Richtung der Seite ac. Um letztere selbst zu bestimmen, beschreibe man mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der b und m aufnimmt und bc in r, ac in p schneidet, ziehe pr, mache rs gleich h und lege durch s eine Parallele mit bc, so bestimmt deren Durchschnitt auf cp die dritte Spitze in a.

Beweis. Nach 13 ist der Winkel bcm $=$ qbc $= \gamma$, und da bm $=$ h′, so ist bq der Ort der Spitze b und bc die Dreiecksseite. Die Sehne rp ist normal bc, rs gleich h gemacht, und weil os parallel bc, so ist os der Ort der Dreieckspitzen, die den Abstand h von bc haben; folglich ist der Durchschnittspunkt a die Spitze selbst und an die Höhe, gleich a, aus ihr auf die Gegenseite.

Anmerkung. Man sieht aus dem Beweise, daß die Normale in jedem beliebigen Punkte auf bc, auf jede andere Art gezogen werden kann, und daß der Halbkreis indifferent dabei ist. Könnte man aber die noch unbestimmte ab als Durchmesser nehmen, so würde die Peripherie durch b, n, m und a gehen und die Sehne na die Spitze unmittelbar schneiden.

132. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: ein Winkel α, die Höhe, gleich h, aus seiner Spitze und noch eine Höhe, gleich h'.

Auflösung. Die Construction hat Uebereinstimmung mit der in voriger Aufgabe und Beziehung auf jene Anmerkung, indem es zuerst darauf ankommt eine Seite bc des Dreiecks zu bestimmen. Fig. 174.

Errichtet man auf einer Geraden ac eine Normale db, gleich h', zieht bm parallel ac, so ist bm Ort der Spitze, die h' zum Abstand von ac hat; und die Richtung cb, welche durch den Winkel acb, gleich α, bestimmt ist, schneidet die Spitze b auf bm, so daß bc Seite des gesuchten Dreiecks wird. Stellt man nun, nach 89, auf bc als Durchmesser einen Peripheriewinkel, dessen Schenkel cg gleich h ist, so giebt der andere bg die Richtung der dritten Dreiecksseite ab und bestimmt zugleich die Länge von ac. Diese Richtung würde man auch in der Tangente aus b an einen Bogen erhalten, den man aus c mit einem Radius gleich h beschriebe.

133. Es sind die drei Höhen eines Dreiecks gleich h, h', h'', gegeben, man soll das Dreieck zeichnen.

1. Auflösung. Man suche zur kleinsten, mittlern und größten Höhe die vierte Proportionale mn, bilde mit dieser und mit den beiden größern Höhen ein Dreieck cde, Fig. 175, a., fälle aus c eine Normale cg, gleich h, und ziehe durch g mit de eine Parallele ab; so ist abc das verlangte Dreieck. Fig. 175, a, b.

Beweis. Da die Dreiecke bac und dec ähnlich sind, so hat man

$$ab : de = bc : cd = ac : ce$$

d. i. $$ab : de = bc : h'' = ac : h'$$

und weil $$bc \,.\, h = ac \,.\, h'',$$

so muß die Höhe h' der Seite bc und die h'' der Seite ac zugehören. Zu der Seite ab ist aber die Höhe cg = h wirklich construirt, folglich hat das gefundene Dreieck die gegebenen Höhen.

2. Auflösung. Man bilde ein Dreieck abc, dessen Seiten gleich den gegebenen Höhen h, h', h'' sind, und ziehe darin die drei zukömmlichen Höhen. Dann zeichne man ein zweites Dreieck mno, dessen Seiten die Höhen des Dreiecks abc sind; ziehe oc' normal mn und gleich h, a'b' parallel mn durch c', so hat man in a'b'o das bedingungsgleiche Dreieck. Fig. 176, a, b.

Beweis. Es ist in Fig. 176, a

$$ab \,.\, cf = ac \,.\, bd = bc \,.\, ae$$

d. i. $h' \,.\, cf = h'' \,.\, ae$

oder $h' : h'' = ae : cf.$

In Bezug auf beide Figuren ist aber

$$on : b'o = om : a'o$$

d. i. $ae : b'o = cf : a'o$

also auch $h' : h'' = b'o : a'o$

oder $a'o \,.\, h' = b'o \,.\, h''.$

Es sind sonach h' und h'' die zu a'o und b'o gehörigen Höhen; und da die dritte Höhe oc' = h auf a'b' wirklich construirt worden ist, so hat das gezeichnete Dreieck a' b' o die gegebenen Höhen.

Fig. 177. 134. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: ein Winkel α und die beiden Segmente, gleich m' und n', welche die Normale aus α auf der Gegenseite bildet.

Auflösung. Bilde aus der Summe der Segmente eine Gerade ab, errichte in dem gemeinschaftlichen Endpunkte d der Segmente und in a Normalen dc und ag und lege an letztere einen Winkel gaf = α. Auf der Mitte m von ab errichte auch die Normale mf, in deren Durchschnitt f sich der Mittelpunkt eines Kreises ergeben wird, auf dessen Peripherie die Spitzen a, b, c des gesuchten Dreiecks liegen, und zwar letztere in dem Durchschnitt der Normale cd.

Beweis. Aus 13, 83, 88.

Fig. 178. 135. Man soll ein Dreieck zeichnen, dessen Transversalen auf die Mitten der Seiten durch die Linien o, n und m gegeben sind.

Auflösung. Auf eine Richtung ai trage die gegebene m in ad, mache dh = $\frac{1}{3}$ ad = dg, beschreibe aus g mit einem Radius = $\frac{2}{3}$ o einen Bogen bei c und schneide diesen aus h mit einem Radius = $\frac{2}{3}$ n: so ist cd die Richtung einer Dreiecksseite, und 2 . cd die Dreiecksseite bc selbst. Die Verbindungslinien ba und ca ergänzen das gesuchte Dreieck abc.

Beweis. Aus 72, 31; vergleiche Aufgabe 56.

Fig. 179. 136. Es sind zur Construction eines Dreiecks gegeben: eine Seite gleich m, die Transversale, gleich h, aus dem gegenliegenden Winkel auf die Mitte von m und die Differenz der an m liegenden Winkel gleich δ.

1. Auflösung. Mit dem Radius gleich h beschreibe einen Halbkreis bnea und ihm concentrisch einen Kreis mfl mit einem Radius gleich $\frac{1}{2}$ m; mache den Winkel ace gleich δ, zieht durch den Durchschnitt f eine Parallele mit ab und verbinde c, g. Durch den nun erhaltenen Durchschnitts-

punkt h lege eine zweite Parallele hk und durch k eine Richtung kc; so schneidet diese auf dem innern Kreise die Eckpunkte m, l, wodurch das Dreieck mnl bestimmt ist, indem eine Halbirungslinie des Winkels kce die noch fehlende Spitze n auf dem äußern Kreise schneidet.

Beweis. Für den Fußpunkt c ist der äußere Kreis geometrischer Ort des Endpunktes der Transversale = h und somit auch der Dreiecksspitze n. Der innere Kreis ist Ort beider übrigen Spitzen, sofern jeder Durchmesser den Fußpunkt der Transversale zur Mitte hat.

Zieht man nf, so wird, weil der Winkel mcf durch cn halbirt worden ist, auch $\llcorner$ mnc = cnl + η sein, unter η den noch unbestimmten Winkel lnf verstanden.

Es ist leicht nachzuweisen, daß dieser Winkel gleich $\llcorner$ kcb = hkc sei und dann hat man

$\llcorner \text{nmf} = \text{nfm} = \frac{1}{2}(2\text{R} - \text{mnf}) = \text{R} - \frac{1}{2}\text{mnf} = \text{R} - \text{mnc}$

und den Winkel nmc $= \text{R} - \text{mnc} + \frac{1}{2}(\delta + \eta)$, nach 88.

oder $\llcorner \text{nmc} = (\text{R} - \text{mnc} + \frac{1}{2}\eta) + \frac{1}{2}\delta$, I.

Ferner ist

der Winkel cln $= 2\text{R} - (\text{ncl} + \text{cnl})$

$= 2\text{R} - (\text{R} - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\delta) - \delta - \eta - \text{cnl}$

$= \text{R} - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\delta - \text{cnl}$

und weil $\llcorner \text{cnl} = \text{mnc} - \eta$

auch $= \text{R} - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\delta - (\text{mnc} - \eta)$

also $= (\text{R} + \frac{1}{2}\eta - \text{mnc}) - \frac{1}{2}\delta$, II.

Nun wird man finden, daß der Ausdruck $\text{R} + \frac{1}{2}\eta - \text{mnc} = \frac{1}{2}\text{s}$ = der halben Summe ist; also hat man die Winkel

$\text{nmc} = \frac{1}{2}\text{s} + \frac{1}{2}\delta$

und $\text{cln} = \frac{1}{2}\text{s} - \frac{1}{2}\delta$

Anmerkung. Mehr Schärfe gewährt der analytisch geführte Beweis.

2. Auflösung. Es sei die Seite gleich n′, die Transversale gleich m′ und die Differenz der Winkel δ gegeben. Fig. 180. Man ziehe cs = n′ und suche einen Kreis, in welchem cs Sehne eines Peripheriewinkels gleich δ ist und eine Proportionale x, so daß

$$\text{m}' + \tfrac{1}{2}\text{n}' : \tfrac{1}{2}\text{n}' = \text{m}' : \text{x}$$

werde.

Diese gefundene Proportionale trage aus der Mitte q von cs in r, ziehe den normalen Durchmesser qm und mit ihm parallel pr; verbinde p, c, trage die gegebene Transversale m′ in cd, ziehe durch den Durchschnitt m und d Parallelen mit cs und zuletzt cn und co; so wird abc das verlangte Dreieck sein.

Beweis. Verbindet man s, a, so ist

$\angle vsn + nsu = 2R - (cso + osu)$

$\angle sco = nsu + osu + cso$, als Winkel an einer parallelen Seite des Antiparallelogramms nosc

daher $\angle vsn + nsu = sco$

folglich, nach 12, sa parallel co

Es ist nun $sc = ab = n'$

und weil qm ein Durchmesser und normal no, so ist om = mn; es verhält sich aber

$mn : ad = mo : db$

also ist $ad = db.$

Durch Construct. gehört die Sehne cs einem Peripheriewinkel = δ an, daher ist

$\angle snc = sco = \delta$, nach 80

also ist $\angle cos - son = con - cno = \delta$

und das Dreieck erfüllt die Bedingungen, da auch $cd = m^1$ gemacht worden ist.

Fig. 181. 137. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite gleich m, die Summe der andern gleich s und ein Winkel α gegeben sind. Man hat hier zwei Fälle:

1. Fall. Wenn der Winkel α von den letztern Seiten gebildet wird.

Auflösung. Ziehe bd = s, lege an diese Linie einen Winkel bde = α und halbire ihn durch dn. Mit einem Radius, gleich m, beschreibe aus b einen Bogen, welcher dn in c, einer Spitze des gesuchten Dreiecks, schneidet, bilde über cd das gleichschenkliche Dreieck cad: so fällt dessen Spitze a mit der des verlangten Dreiecks zusammen und letzteres ist in abc völlig bestimmt.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Zieht man mit de eine Parallele durch c, so wird durch diese das Dreieck ganz einfach ergänzt. Da der Bogen die Richtung dn zweimal schneidet, so lassen sich mit den gegebenen Stücken zwei Dreiecke bilden; beide sind aber congruent. Die Analogie dieser und der Aufgabe 89. fällt in die Augen.

2. Fall. Wenn der Winkel α an der gleich m gegebenen Seite liegen soll.

Fig. 182. Auflösung. Trage an ab, gleich m, einen Winkel dab, gleich α, mache dessen Schenkel ad gleich s, ziehe bd und bilde über letzterer ein gleichschenkliches Dreieck bcd, wodurch die in der Summe s begriffene Seite cd in bc gelegt, und das Dreieck abc das verlangte wird.

Beweis. Leicht.

138. Die Summe zweier Seiten gleich s, die dritte gleich m und die zu letzterer gehörige Höhe, gleich h, sind gegeben; man soll das Dreieck zeichnen. Fig. 183.

1. Auflösung. Auf ab = m errichte eine Normale bp = h und in p eine dergleichen; trage h nochmals auf die Verlängerung von bp in pm, beschreibe aus a mit einem Radius, gleich s, einen Bogen qfeo, nehme auf diesem beliebig einen Punkt o und suche zu m, b und o einen Kreis. Durch die Punkte o und e, wo der letztere Kreis den erstern schneidet, lege man eine Richtung bis zum Durchschnitt d der Normale, und an den Kreis qfeo eine Tangente, die durch d geht. Verbindet man deren Berührungspunkt f mit a, so ist fa die Richtung der Dreiecksseite ac und der Durchschnitt c mit pt deren Endpunkt und zugleich Spitze des gesuchten Dreiecks.

Beweis. Da bp = h, so ist die Parallele pt Ort der Spitze vom gesuchten Dreieck, welche der gegebenen Seite gegenliegt, und die bc muß pt in einem noch unbestimmten Punkte c^o, c, c′ ... treffen. Es ist also ein gleichschenkliches Dreieck auf bd möglich, das zu den gleichen Seiten die Dreiecksseite bc hat; dieses Dreieck möge vorläufig bcm sein.

Es kann aber die Ecke eines solchen Dreiecks, wenn durch die Richtung der gleichen Seite mc, zugleich die Richtung der Dreieckseite ac gegeben sein soll, nicht in m liegen: weil zwar ac + cm = s, aber der Winkel mca kleiner als 2 R und andrerseits die Gerade ma nicht gleich s sein würde, nach 30.

Der Ort für die Ecke, welche diese Beziehungen zu dem Dreieck abc eingeht, muß nothwendig ein Kreis und aq = af = ae = ao = s sein. Denkt man die Ecke in f und aus ihr eine Tangente an den Kreis qfeo, welche die Normale bm in d schneide, so ist

$$dm \,.\, be = de \,.\, eo = de' \,.\, e'o' = \ldots,$$

und jedes dieser Rechtecke äußere Potenz des Punktes d für den Kreis bmeo: und weil de . oe auch äußere Potenz des Punktes d für den Kreis qfeo ist, so hat man nach 99., in der Tangente fd das Maaß für die Größe jeder äußern Potenz für den letztgenannten Kreis, und die Tangente ist constant in Bezug auf de . oe und dm . bm.

Da nun auch, wenn c die Spitze des gesuchten Dreiecks ist, bc = cf = cm, also f zugleich Berührungspunkt der Kreise aus c und aus a ist: so muß der Winkel fca = 2 R sein und c in der Richtung af liegen.

Anmerkung. Die Construction hat einige praktische Schwierigkeiten, weil der mit dem Radius, gleich s, beschriebene Bogen wohl in 2 . h, d. i. in m selbst oder doch sehr nahe m fällt. Im ersten Falle ist m selbst der Berührungspunkt, im zweiten Falle erfordert die Construction eine sehr subtile, durch mehrere Hülfssätze unterstützte, Behandlung.

2. Auflösung. Ist die Seite ab gleich m, die Höhe cu gleich n und die Summe der beiden andern Seiten gleich p gegeben, so suche man zwischen p + m und p — m die mittlere Proportionale; hat man diese gleich q gefunden, so suche man zwischen $\frac{1}{2}q + n$ und $\frac{1}{2}q - n$ die mittlere Proportionale, welche r sein möge; und endlich zu q, r und m die vierte. Es sei letztere Proportionale s, so ist durch sie die halbe Differenz der beiden nicht gegebenen Seiten gefunden und die Aufgabe ist nun auf die 146. zurückgeführt, so daß das Dreieck nach jener Auflösung gezeichnet werden kann.

Beweis. Nach dem gegebenen Verfahren ist

$$q = \sqrt{(p+m)(p-m)} = \sqrt{p^2 - m^2}$$

und $$r = \sqrt{(\tfrac{1}{2}q+n)(\tfrac{1}{2}q-n)} = \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-n^2}$$

und weil $q : r = m : s$, so ist $s = \frac{rm}{q}$, und wenn man substituirt

$$s = \frac{m\sqrt{\frac{1}{4}q^2-n^2}}{\sqrt{p^2-m^2}} = m\sqrt{\frac{\frac{1}{4}(p^2-m^2)-n^2}{p^2-m^2}}$$

$$= m\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{n^2}{p^2-m^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - \frac{m^2n^2}{p^2-m^2}}$$

Setzt man den letzten Ausdruck gleich x, so hat man

$$x^2 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{m^2n^2}{p^2-m^2}, \text{ und } \frac{1}{4}m^2 - x^2 = \frac{m^2n^2}{p^2-m^2}$$

also auch $$m^2 . n^2 = (\tfrac{1}{4}m^2 - x^2)(p^2-m^2)$$

$$= (\tfrac{1}{2}m+x)(\tfrac{1}{2}m-x)(p+m)(p-m);$$

folglich ist

$$\frac{m^2 . n^2}{4} = (\tfrac{1}{2}m+x)(\tfrac{1}{2}m-x)\left(\frac{p+m}{2}\right)\left(\frac{p-m}{2}\right)$$

und $$\frac{mn}{2} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}m+x)(\tfrac{1}{2}m-x)\left(\frac{p+m}{2}\right)\left(\frac{p-m}{2}\right)}$$

d. i., wenn man für die Werthe die Linien selbst setzt,

$$\triangle abc = \tfrac{1}{4}\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+bc-ac)(ab+ac-bc)(ac+bc-ab)}$$

welches die bekannte Formel ist; woraus denn hervorgeht, daß die Seiten des Dreiecks richtig bestimmt worden sind.

139. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: die Summe zweier Seiten A + B = s, die dritte Seite, gleich c, und die zur Seite A gehörige Höhe gleich h.

Auflösung. Auf einer Geraden pr errichte man eine Normale on = h, schneide aus n mit einem Radius gleich c, die Richtung pr in q, mache qr gleich qn nnd rp gleich s; so erhält man ein Dreieck pqn, welches die gegebenen Bedingungen enthält. Fig. 184.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Die gegebenen Bedingungen sind jedoch insofern nicht vollkommen bestimmend, als sie noch ein zweites unv zulassen, welches von erstern der Bildung nach verschieden ist. Beide sind aber inhaltsgleich.

140. Zur Construction eines Dreiecks sind zwei Winkel φ und ψ und die Summe, gleich s, der Seiten gegeben, welche jenen Winkeln gegenliegen.

Auflösung. An eine Richtung mq trage man in einen beliebigen Punkt a den Winkel daq = φ und auch den Winkel dan = ψ; halbire das Supplement nam durch ap, mache ad gleich s und trage in adb den Winkel $\frac{1}{2}$ nam; so wird dessen Schenkel die Richtung mq in b, einem Eckpunkt des gesuchten Dreiecks, schneiden. Nun bilde man auf bd ein gleichschenkliches Dreieck bdc, dessen gleiche Seite in die Richtung ad fällt, so trifft dessen Spitze mit der des verlangten Dreiecks in c zusammen. Fig. 185.

Beweis. Leicht.

141. Mit der Summe zweier Seiten, gleich s, und den Höhen, gleich h und h', auf diesen Seiten soll man das Dreieck zeichnen. Fig. 186.

Auflösung. Man suche zu h + h', s und h die vierte Proportionale, trage diese in mn, errichte beliebig auf ihr eine Normale op, gleich h' und ziehe pu parallel mn. Hierauf beschreibe über mn einen Halbkreis, trage in ihn die Sehne nr, gleich h, ziehe die Richtung mr, bis sie die Parallele schneidet, so ist mnq das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

142. Zur Construction eines Dreiecks ist gegeben, dessen Umfang gleich s, ein Winkel α und die Höhe, gleich h, aus seiner Spitze. Fig. 187.

Auflösung. Man errichte auf cd, gleich s, eine Normale dk, gleich h, und ziehe kn parallel cd. In c trage einen Winkel dcf, gleich α, halbire ihn durch cg und schneide diese Halbirungslinie durch eine Normale hg aus der Mittel h von cd.

Dieser Durchschnitt giebt den Mittelpunkt eines Kreises, den man durch c und d zu legen hat; jeder Durchschnitt p oder q auf der Parallele kn aber kann Spitze des gesuchten Dreiecks sein.

Verbindet man nun p mit c und d und bildet auf dp und cp gleichschenkliche Dreiecke pmc und prd, so daß die gleichen Seiten in cd fallen, so sind deren Spitzen r und m zugleich Spitzen des gesuchten Dreiecks rmp.

Beweis. Die Höhe h des Dreiecks ist durch die Parallele kn gegeben, wenn die Gegenseite des gegebenen Winkels in cd liegt.

In dem gleichschenklichen Dreieck cgd ist nun der Winkel gdc = gcd = $\frac{1}{2}\alpha$, also der Winkel cgd = 2 R — α;

$$\left.\begin{array}{l} \llcorner pcd = \frac{1}{2} pgd \\ \llcorner pdc = \frac{1}{2} pgc \end{array}\right\} \text{nach 88.}$$

und weil $\llcorner pmc = 2 R - pgd$

und $\llcorner prd = 2 R - pgc$

so sind ihre Supplemente pmr und prm zusammen gleich pgd + pgc = cgd = 2 R — α, folglich der dritte Winkel gleich α. Und da

$$dr + rm + mc = pr + rm + pm = cd = s$$

so ist das Dreieck rmp das gesuchte.

143. Es ist die Summe der drei Seiten, gleich s, ein Winkel, gleich φ, und eine Höhe aus einem der andern Winkel gegeben; man soll das Dreieck bilden.

Fig. 188. Auflösung. Errichte auf cd = s eine Normale df = h und ziehe fl parallel cd; in d trage einen Winkel kdc = φ, halbire ihn durch dn, verbinde den Durchschnittspunkt n mit c und bilde auf nc und nd durch Normalen auf deren Mitten die gleichschenklichen Dreiecke dnm und cnr, wodurch das verlangte Dreieck in mnr bestimmt wird.

Beweis. Die Parallele fl ist der Ort der Spitzen, deren Abstand von cd = df = h ist. In dem gleichschenklichen Dreieck dmn ist jeder Winkel an der ungleichen Seite gleich $\frac{1}{2}\varphi$, also der Winkel dmn = 2 R — φ, und sein Supplement gleich φ. Da auch

$$dm + mr + rc = mn + mr + nr = cd = s,$$

so ist das Dreieck mnr das gesuchte.

144. Die Summe, gleich s, der Seiten eines Dreiecks und die Bedingung sind gegeben, daß zwei spitze Winkel sich verhalten wie 1 : 2; man soll das Dreieck zeichnen.

Fig. 189. Auflösung. In den Endpunkt c einer Geraden bc = s trage man einen beliebigen Winkel ψ und halbire ihn durch cg; in den andern Endpunkt b einen solchen $\varphi = \frac{1}{2}\psi$

den man durch bg halbirt. Zieht man durch den Durchschnittspunkt g die Linien $gk \ddagger cd$ und $gh \ddagger bf$, so ist kgh das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß die Höhe aus g veränderlich sein muß und daß sie im Verhältniß des halben Winkels ψ zu und abnimmt. Die gegebenen Bedingungen werden daher erst dann bestimmend, wenn die Größe dieses Winkels gegeben ist.

Diese Größe kann aber $\frac{4}{3}$ R nicht überschreiten, weil sonst der Winkel kgh gleich Null, also auch kh gleich o würde.

145. Der Umfang eines Dreiecks sei gleich pc und die Winkel seien gleich α, β, γ gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung. Bilde auf cp ein ähnliches Dreieck cnm, mittelst der gegebenen Winkel, verlängere eine Seite, cn, mache $co = cn + nm + mc$, ziehe mo, dann $bp \ddagger om$ und $ab \ddagger mn$, so hat man in abc das verlangte Dreieck. Fig. 190

Beweis. Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke cnm und abc ist

$$cm : cn : nm = bc : ac : ab$$

und wegen der ähnlichen Dreiecke cmo und cbp auch

$$cm : bc = co : cp$$

daher $cm + cn + nm : co = bc + ac + ab : pc$

und weil $cm + cn + nm = co$

so muß auch $bc + ac + ab = pc = s$ sein.

146. Aus einer Seite, gleich m, der Summe der andern, gleich n, und deren Differenz, gleich p, das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Da die halbe Summe, vermehrt um die halbe Differenz, immer den größern Summanden (die größere Seite), und die halbe Summe, vermindert um die halbe Differenz, den kleinern Summanden (die kleinere Seite) giebt, so bilde man das Dreieck aus m, $\frac{1}{2}(n+p)$ und $\frac{1}{2}(n-p)$ und hat dann das verlangte.

147. Man soll ein Dreieck construiren, wenn die Summe der ersten und dritten Seite gleich s', die Summe der zweiten und dritten Seite gleich s'' und der Winkel, den die erste und zweite Seite bilden, gleich α gegeben sind.

Auflösung. Hat man einen Winkel $eaf = \alpha$ gezeichnet, so trage man s' in ae, s'' in af und ziehe ef; nehme eg beliebig und fh gleich eg, ziehe gi parallel ef und schneide ig aus h mit einem Radius, gleich eg, in i. Durch fi lege eine Richtung und schneide aus deren Durch- Fig. 191.

schnittspunkt b den Schenkel af mit einem Radius, gleich be, in c. Das Dreieck abc ist das verlangte.

Beweis. Man hat in dem Dreieck bfe

$$bf : be = fi : eg$$

und, weil $be = bc$ und $eg = hi$,

auch $bf : bc = fi : hi$

also ist bc parallel hi.

Auch ist $be : eg = bf : fi$

und $fc : fh = bf : fi$,

daher $be : eg = fc : fh$

und weil $eg = fh$,

so ist $be = fc = bc$.

Daher $ac + fc = ac + bc = af = s''$

und $ab + be = ab + bc = ae = s'$

148. Man soll ein Dreieck zeichnen, wenn gegeben sind: eine Seite gleich b, die Summe der beiden andern, gleich s, und die Differenz α der Winkel, welche den letztern Seiten gegenliegen.

Fig. 192. Auflösung. Man zeichne einen Winkel $dcf = \alpha$, mache cd gleich b, halbire α durch cg und ziehe ch normal cg. Diese Normale schneide man aus d mit einem Radius, gleich s, in k, ziehe dk und bilde das gleichschenkliche Dreieck ckm mit der gleichen Seite auf dk.

Die Spitze m fällt dann mit der des verlangten Dreiecks zusammen und man hat das letztere in cdm bestimmt.

Beweis. Durch Bildung des gleichschenklichen Dreiecks kmc ist km gleich cm geworden, also $dm + cm = dm + km = s$.

Ferner ist $\llcorner mck = R - \left(\frac{\alpha}{2} + dcm\right)$

und $\llcorner cmk = 2R - 2 . \llcorner mck$,

daher auch $\llcorner cmk = 2R - 2\left[R - \left(\frac{\alpha}{2} + dcm\right)\right]$

$$= \alpha + 2 . \llcorner dcm.$$

Da aber auch, nach 21.

$$\llcorner cmk = mdc + mcd$$

so ist $\llcorner mdc + mcd = \alpha + 2\,mcd$,

folglich $\llcorner mdc - mcd = \alpha$

149. Aus der Summe zweier Seiten, der Summe λ der Winkel an der dritten Seite und dieser Seite selbst das Dreieck zu bestimmen.

Auflösung. Man suche einen Winkel, gleich $2R - \lambda$, welches derjenige ist, den die in der Summe begriffenen

Seiten einschließen; wodurch diese Aufgabe auf die 137. 1. Fall, zurückgeführt wird.

150. Die Construction eines Dreiecks soll mittelst einer Seite ab, gleich m, der Summe der beiden andern, gleich s, und der Projection von bd auf ab, gleich p, ausgeführt werden. Fig. 193.

Auflösung. Auf ab = m trage man bc = p, errichte in c eine Normale, schneide sie aus b mit einem Radius, gleich s, in d und verbinde d mit a und b.

Ueber ad und bd beschreibe Halbkreise, errichte in der Mitte e eine Normale, ziehe fd und trage diese Sehne in dg. Aus g fälle man dann eine Normale gh und schneide aus b mit bh die Normale cd in k. Dadurch ergiebt sich das verlangte Dreieck abk.

Beweis. fd ist mittlere Proportionale zwischen $\frac{ad}{2}$ und ad, so daß

$$\tfrac{1}{2}\,ad : fd = fd : ad$$

desgleichen ist, weil fd = dg,

$$db : \left\{ \begin{matrix} dg \\ fd \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} dg \\ fd \end{matrix} \right\} : dh;$$

Kann man nun nachweisen, daß ak = dh sei, so muß bh die dritte Seite des gesuchten Dreiecks abk sein.

Nach 48 ist

$$ad_q = ab_q + bd_q - 2\,ab\,.\,bc$$

auch $ak_q = ab_q + bk_q - 2\,ab\,.\,bc,$

also $ak_q = ad_q = bk_q - bd_q$

und $bk_q = ak_q + bd_q - ad_q.$

Ferner ist

$$bk_q = bh_q = (bd - dh)_q = bd_q + dh_q - 2\,bd_q\,.\,dh;$$

weil aber $2\,bd\,.\,dh = 2\,dg_q = 2\,df_q = ad_q$

so ist $bk_q = bd_q + dh_q - ad_q$

und $ak_q + bd_q - ad_q = bd_q + dh_q - ad_q$

d. i. $ak_q = dh_q$

und $ak = dh$

151. Es sind gegeben die Summe zweier Seiten, gleich s, und deren Projectionen auf der dritten, gleich m und n; man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung. Man trage auf eine Gerade die gegebenen Projectionen in bd und da, ziehe durch a eine beliebige Richtung ae = s, mache df = db und ag = af. Ziehe dann durch g mit be die Parallele gi, mache ah = ai und halbire eh in n. Nun errichte in d eine Normale, Fig. 194.

schneide sie aus a mit einem Radius, gleich an, in c und ziehe, zu Ergänzung des verlangten Dreiecks abc, nach bc und ac.

Beweis. Man verlängere ac nach m, mache ak gleich ah, am = ae = s und verbinde bm.

Man hat dann in dem Dreieck abe

$$ae : ag = ab : ai$$

oder $$ma : af = ab : ah = ab : ak$$

Daher läßt sich durch m, b, f und k ein Kreis denken, worin ab und ma Secanten sind, die sich in a treffen, und dessen Mittelpunkt c ist. Folglich ist

$$cm = bc = cf = ck$$

also $$ac + cm = ac + bc = s.$$

152. Man soll ein Dreieck zeichnen, wenn eine Seite, gleich m, die Differenz der andern, gleich u, und die Differenz δ der Winkel, welche den unbestimmten Seiten gegenliegen, gegeben sind.

Fig. 195. Auflösung. An bc = m trage einen Winkel dbc $= \frac{1}{2}\delta$, schneide aus c mit einem Radius gleich u den Schenkel bd′ in d und ziehe die Richtung cd. In der Mitte n von bd errichte eine Normale na, welche sich mit cd, gehörig verlängert, in a schneiden und in diesen Punkt eine Spitze des gesuchten Dreiecks (abc) bestimmen wird.

Beweis. Das Dreieck abd ist gleichschenklich, daher ad = ab, und ad + u die größere Seite.

Es ist ferner

$$\angle adb = acb + \frac{1}{2}\delta, \text{ nach } 21.$$

und $$\angle abd = abc - \frac{1}{2}\delta,$$

daher $$\angle adb + abd = acb + abc,$$

d. i. gleich der Winkelsumme an bc.

Man hat daher durch Hinzufügung der halben Differenz

$$\tfrac{1}{2}\angle(adb + abd) + \tfrac{1}{2}\delta = \tfrac{1}{2} \cdot 2\angle abd + \tfrac{1}{2}\delta$$
$$= \angle abd + \tfrac{1}{2}\delta$$

den größern Winkel abc; und durch Verminderung um die halbe Differenz, nemlich

$$\angle adb - \tfrac{1}{2}\delta = abd - \tfrac{1}{2}\delta$$

den kleinern Winkel acb; wonach also das Dreieck abc die gegebenen Bedingungen enthält.

Anmerkung. Beim Schneiden der Richtung bd erhält man immer zwei Durchschnitte nemlich d und d′; beide Punkte sind aber zur Construction brauchbar, indem die mittelst jedem derselben gebildeten Dreiecke abc und a′bc congruent sind.

153. Man soll mit einer Seite, gleich m, der zugehörigen Höhe, gleich h und der Differenz δ der an m liegenden Winkel ein Dreieck construiren. Fig. 196.

Auflösung. Ist bc gleich m gemacht, so errichte man in der Mitte d eine Normale kf und trage in de die gegebene Höhe, gleich h; ziehe mit bc durch e eine Parallele lg, in d aber lege einen Winkel edg, gleich der Differenz δ. Man ziehe ferner die Richtung eb, schneide sie aus d mit einem Radius, gleich dg in h und ziehe dh, dann bo parallel dh. Der Durchschnitt der letztern mit kf giebt den Mittelpunkt eines Kreises, den man mit dem Radius ob beschreibt und durch den man auf der Parallele lg zwei Schnitte a und l erhält, welche beide als Spitzen des gesuchten Dreiecks genommen werden können und die congruenten Dreiecke abc oder lcb geben.

Beweis. Da de = h, so ist die Parallele lg der Ort für die, der Seite bc gegenliegende, Spitze. Erweist sich noch, daß in dem gefundenen Dreieck abc die Differenz der Winkel an bc gleich δ ist, so ist die Construction richtig.

Verbindet man den Mittelpunkt o mit b, c, a und l, so ist der Winkel boc = 2 bac

und $\frac{1}{2}\angle boc = bac = bod.$

Nun ist dh = dg und ob = oa

daher dh : ob = dg : oa

und dh : ob = de : eo

folglich dg : oa = de : eo

woraus hervorgeht, daß das Dreieck aeo ähnlich dem Dreieck ged und oa parallel dg ist.

Zieht man noch cl, so hat man

$\angle acl = bcl - acb = abc - acb$

desgleichen $\angle acl = \frac{1}{2} aol = aoe = gde$

daher ist $\angle abc - acb = gde = \delta$

154. Es sind gegeben die Differenz zweier Seiten und die beiden Winkel α und β, wovon einer von jenen Seiten gebildet wird; man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Man trage auf eine Gerade ab die gegebene Differenz, gleich m, in bd, bilde den Winkel cba = β und in d den Winkel cda = R − $\frac{1}{2}\alpha$. Der Durchschnittspunkt der Schenkel in c ist eine Spitze des Dreiecks, wovon b die andere ist. Macht man noch den Winkel dca gleich cda, so erhält man in a die dritte Spitze des gesuchten Dreiecks. Fig. 197.

Beweis. Leicht.

155. Es ist eine Seite, gleich p, die Differenz der beiden andern, gleich d und ein Winkel α gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Es können drei Fälle, je nach der Lage des Winkels α, eintreten.

1. Fall. Wenn α der gegebenen Seite p gegenliegt.

Fig. 198. 1. Auflösung. Ziehe mc beliebig, trage in ca die Differenz d und errichte ag normal cm. An ag lege einen Winkel hag $= \alpha$, halbire ihn durch af und schneide diese Halbirungslinie aus c mit einem Radius gleich p in k, auf ak aber bilde ein gleichschenkliches Dreieck amk, dessen gleiche Seite mit der Richtung ca zusammenfällt; kmc ist das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da am $=$ km, so ist am $+$ d $=$ km $+$ d $=$ cm, und durch Construction ck $=$ p die dritte Seite des Dreiecks.

In Bezug auf den gegebenen Winkel ist

	$\llcorner$cag $+ \frac{1}{2}\alpha +$ mak $= 2$ R
und	$\llcorner$mak $+$ mka $+$ kma $= 2$ R
oder	$\llcorner$kma $+ 2 .$ mak $= 2$ R
daher	$\llcorner$kma $+ 2 .$ mak $=$ cag $+ \frac{1}{2}\alpha +$ mak
d. i.	$\llcorner$kma $= \frac{1}{2}\alpha +$ cag $-$ mak
und weil	$\llcorner$cag $-$ mak $= \frac{1}{2}\alpha$,
so ist auch	$\llcorner$kma $= \alpha$

Fig. 199. 2. Auflösung. Man bilde ein gleichschenkliches Dreieck def, worin der Winkel an der Spitze gleich α ist, verlängere eine der gleichen Seiten um die gegebene Differenz d, und auch die ungleiche Seite df; schneide die verlängerte df aus b mit einem Radius, gleich p, in a und ziehe ac parallel ef, so ist abc das verlangte Dreieck.

Beweis. Aus 51, 58.

Fig. 200. 3. Auflösung. Man bilde einen Winkel gleich α und ein beliebiges gleichschenkliches Dreieck, worin α der ungleichen Seite gegenliegt; mache bg gleich der Differenz d, beschreibe aus g mit dem Radius, gleich p, einen Bogen, welcher die verlängerte be in a schneidet, und ziehe durch a eine Parallele aq mit mb. Aus dem Durchschnitt k schneide dann mit dem Radius gleich p die verlängerte mb in c, so ist mkc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

2. Fall. Wenn der gegebene Winkel γ der kleinern von den nicht gegebenen Seiten gegenliegt.

Fig. 201. Auflösung. Man trage in c an die gegebene Seite bc, gleich m, einen Winkel acb $= \gamma$, in cm die Differenz d und ziehe bm. Auf letztere construire ein gleichschenkli-

ches Dreieck bma, dessen gleiche Seite mit dem Schenkel ac zusammenfällt, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

3. Fall. Wenn der gegebene Winkel β der größern der unbestimmten Seiten gegenliegt.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel rnm, gleich β, mache mn gleich p und die Verlängerung no gleich d; ziehe mo und stelle auf mo ein gleichschenkliches Dreieck, dessen gleicher Schenkel in nr liegt. Das verlangte Dreieck hat man dann in qmn. Fig. 202.

Beweis. Leicht.

156. Zu Bildung eines Dreiecks sind gegeben: die Differenz zweier Seiten gleich d, die Höhe gleich h auf die größere dieser Seiten und die dritte ab, gleich n. Fig. 203.

Auflösung. Ueber ab beschreibe einen Halbkreis, trage in ihn die Sehne bo = h und ziehe die Richtung ao. Auf diese trage man die Differenz d in am, ziehe bm und construire das gleichschenkliche Dreieck mbc. Man erhält dann in abc das verlangte Dreieck.

Beweis. Da der Winkel boa = R, und bo = h gemacht worden, so ist bo die zu ac gehörige Höhe. Da ferner bc = cm und am = d, so muß bc + d = cm + am = ac d. i. die größere Seite, und ac — d = cm = bc, die kleinere Dreiecksseite sein.

157. Aus der Differenz zweier Seiten, gleich d, der Höhe, gleich h, auf die kleinere, und der dritten Seite, gleich m, das Dreieck zu bilden. Fig. 204.

Auflösung. Auf ap = m beschreibe einen Halbkreis, trage in diesen die Sehne pd = h und ziehe die Richtung ad. Auf diese trage die Differenz d in an, ziehe np und zeichne auf letztere das gleichschenkliche Dreieck npc, dessen gleiche Seite in nd fällt. Das Dreieck apc ist das verlangte.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Man kann das Dreieck ergänzen, wenn man mit pn durch a eine Parallele ao zieht und diese aus n mit einem Radius, gleich pa = m schneidet; wodurch man in p, o die Richtung der dritten Seite und im Durchschnitt c die Spitze des Dreiecks erhält; oder daß man das gleichschenkliche Dreieck mit der Hülfe der auf die Mitte von pn gestellten Normale bildet.

158. Aus der Differenz zweier Seiten, gleich d, und den Höhen auf diese Seiten, gleich h′ und h″, das Dreieck zu zeichnen.

Auflösung. Man mache ab gleich d, errichte in beiden Endpunkten Normalen ak und bh, trage auf diese (oder Fig. 205.

besser auf die Halbirungslinien der rechten Winkel, ag und bf) die gegebenen Höhen h′ und h″. Durch deren Endpunkte k und h (oder g und f) lege die Richtung kh (oder gf), so wird diese durch die Spitze c des Dreiecks gehen.

Nun beschreibe über bc einen Halbkreis, trage in diesen die Sehne bm = h″, so ist die Richtung cm (oder praktischer die Normale auf bm) die der dritten Seite, welche man noch gleich bc zu machen hat.

Beweis. Da ak parallel bh, so hat man

$$ak : bh = ac : bc$$

d. i.

$$h' : h'' = ac : bc$$

oder, weil cd = bc gemacht worden

$$h' : h'' = ac : cd$$

In jedem Dreieck stehen aber die Höhen in umgekehrtem Verhältnisse der zugehörigen Seiten, daher ist h′ die zu cd und h″ die zu ac gehörige Höhe.

Weil noch bcd als gleichschenkliches Dreieck gedacht werden kann, so müssen die Höhen auf die gleichen Seiten bc und cd gleich sein; also ist cm die Richtung der Seite cd, und ist deren Länge durch bc gegeben, so muß auch ad die dritte Seite des Dreiecks sein.

Anmerkung. Man würde auch die Richtung der Seite cd finden, wenn man mit h″ einen Bogen aus b und mit h′ einen solchen aus a beschriebe, dann an beide Bögen eine Tangente legte. Dieses Verfahren ist aber praktisch unbequem.

Fig. 206. 159. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten A = a und B = b gegeben sind, die Differenz der Seiten B — C aber gleich sein soll der Differenz der Seiten C — A.

Auflösung. Bilde die Summe der gegebenen Seiten a + b in npm, beschreibe aus p mit einem Radius, gleich $\frac{1}{2}$ mn, einen Bogen bei q, schneide ihn aus m mit dem Radius gleich b: so hat man das verlangte Dreieck in pmq.

Beweis. $A = pm = a$

$$B = qm = b$$

also

$$C = pq = no = \frac{a+b}{2};$$

daher

$$B - C = b - \frac{a+b}{2} = \tfrac{1}{2}(b-a)$$

und

$$C - A = \frac{a+b}{2} - a = \tfrac{1}{2}(b-a)$$

folglich

$$B - C = C - A.$$

160. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Differenz der ersten und dritten Seite gleich d, die der zweiten und dritten gleich d′, und der von der ersten und zweiten Seite gebildete Winkel α gegeben sind.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel gal, gleich α, mache ae = d, af = d′ und ziehe ef. Von e nach g und von f nach h trage beliebige gleiche Theile, ziehe li parallel ef, schneide li aus h mit einem Radius, gleich eg, in i und ziehe if: so schneidet diese in b die Spitze des gesuchten Dreiecks, und die Seite bc findet man durch eine Parallele mit hi durch b. Fig. 207.

Beweis. Der Winkel α ist unmittelbar bestimmt; ferner ist

$$hi : if = bc : bf$$

und weil $hi = eg = hf$

so ist auch $hf : if = bc : bf$

aber auch $hf : if = cf : bf,$

folglich $bc = cf$

und $ac - bc = d'$

daher ist bc die dritte Seite des Dreiecks.

Man ziehe noch im parallel ag und verlängere se nach m; es ist dann

$$fi : bf = hi : bc$$

und auch $fi : bf = im : be$

daher $hi : bc = im : be;$

weil nun eg parallel im und gi parallel em, hi gleich eg ist, so hat man im = hi, folglich bc = be und in abc das bedingungsgleiche Dreieck.

161. Es ist eine Seite gleich m, die Differenz der anliegenden Winkel gleich δ und der dritte Winkel φ gegeben; man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Mit den Schenkeln des Winkels φ bilde man ein gleichschenkliches Dreieck adf, trage an df einen Winkel fde = $\frac{1}{2}\delta$, in eg die gegebene Seite, gleich m, ziehe bg ╪ ea und bc ╪ de, so ist abc das gesuchte Dreieck. Fig. 208.

Beweis. Da bc ╪ ed und bg ╪ ec, so ist bc = eg = m.

Ferner ist $\llcorner adf = afd = \frac{2R - \varphi}{2} = abh = ahb$

also $\llcorner ade = \frac{2R - \varphi}{2} + \frac{1}{2}\delta = abc$, I.

Es ist aber $\llcorner abc + cbg + gdb = 2R$

und, weil $\llcorner cbg = acb,$

auch $\llcorner abc + acb + gbd = 2R$

und $\llcorner acb = 2R - gbd - \left(\frac{2R - \varphi}{2} + \frac{1}{2}\delta\right).$

Da nun auch $\llcorner gbd = \varphi$

so ist $\llcorner acb = \frac{2R - \varphi}{2} - \frac{1}{2}\delta$. II.

Folglich ist nach I, $\llcorner abc$ gleich der halben Summe vermehrt um die halbe Differenz, und nach II. $\llcorner acb$ gleich der halben Summe vermindert um die halbe Differenz, und es sind diese Winkel der Forderung der Aufgabe entsprechend.

162. Es ist die Differenz zweier Seiten und die Summe nebst der Differenz der gegenliegenden Winkel gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung. Man suche zuerst die Winkel selbst aus ihrer Summe und Differenz; dadurch wird das weitere Verfahren auf die Auflösung der Aufgabe 154. zurückgeführt.

Fig. 209. 163. Aus der Differenz zweier Seiten, gleich d', der Differenz ihrer Projectionen auf der dritten Seite, gleich d'', und der Differenz der Winkel, welche an letzterer liegen, gleich δ, das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Man trage d'' auf eine Gerade, in ad und beschreibe über ad einen Bogen, welcher den Winkel $R + \frac{1}{2}\delta$ zum Mittelpunktswinkel hat. Aus a schneide man den Bogen mit einem Radius gleich d' in e, ziehe die Richtung ae und de; in d trage man einen Winkel edf = def, so schneidet dessen Schenkel die Richtung ae in f, welches die Spitze des gesuchten Dreiecks ist.

Fällt man noch aus f die Normale fc, macht bc = cd, zieht bf, so ist abf das Dreieck selbst.

Beweis. $\llcorner fed = fde = aed - dfe = R + \frac{1}{2}\delta - dfe$

$\llcorner fed = 2R - (R + \frac{1}{2}\delta) = R - \frac{1}{2}\delta$;

daher ist $R + \frac{1}{2}\delta - dfe = R - \frac{1}{2}\delta$

und $\llcorner dfe = \delta$

Zieht man dg ∦ af durch d, so ist auch

$\llcorner fdg = dfe = \delta$

$\llcorner bdg = dae$

und $\llcorner bdc = cbd$,

folglich $\llcorner bdc - bdg = cbd - dae = \delta$.

Ferner ist $bf = df = fe$

daher $af - ae = af - bf = ae = d'$

und $ad = ac - cd = ac - bc = d''$

164. Es sind zur Construction eines Dreiecks eine Seite, gleich m, ein Winkel φ, und die Bedingung gegeben, daß sich die Summe der nicht gegebenen Seiten zu ihrer Differenz verhalte wie die Linien n : o. Man unterscheide zwei Fälle.

1. Fall. Wenn der Winkel φ der gegebenen Seite anliegt.

Auflösung. An ab = m lege man einen Winkel cab = φ, trage auf einen der Schenkel die als Verhältniß gegebenen Linien n in ad und o in ae, halbire das Stück de in i und schneide mit einem Radius, gleich $\frac{1}{2}$ de, den andern Schenkel aus i in h, ziehe bc parallel ih, so erhält man in abc das verlangte Dreieck. Fig. 210.

Beweis. Der Winkel φ und die gegebene Seite m sind unmittelbar eingetragen; ferner hat man

$$ai : hi = ac : bc$$

oder $$ai : ei = ac : bc$$

und $$ae + ei : ei = ac : bc,$$

daher $$ae + ei + ei : ei = ac + bc : bc$$

d. i. $$ad : ei = ac + bc : bc$$

oder $$n : ac + bc = ei : bc, \text{ I.}$$

Es folgt aber auch aus einer der obigen Proportionen

$$(ae + ei) - ei : ei = ac - bc : bc$$

oder $$ae : ei = ac - bc : bc$$

und $$o : ac - bc = ei : bc, \text{ II.}$$

Aus I und II ergiebt sich

$$o : ac - bc = n : ac + bc$$

folglich $$o : n = ac - bc : ac + bc.$$

2. Fall. Wenn der Winkel α der gegebenen Seite gegenliegt.

Auflösung. Man ziehe beliebig ad, theile diese so, daß ae : ad = o : n werde, halbire das Stück ed in i und lege in i einen Winkel aik = α, trage $\frac{1}{2}$ de in ih, ziehe die Richtung ah und mache ab gleich m. Zieht man noch bc parallel ik, so hat man in abc das verlangte Dreieck. Fig. 211.

Beweis. Nach dem vorigen.

165. Aus der Differenz (ab + bc) — ac = d', der Summe zweier Seiten, ab + bc und der dritten Seite ac, nebst den beiden Winkeln, welche an ab liegen, das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Man ziehe de = d', bilde den Winkel cde, gleich $\frac{1}{2}\beta$ und den aec = R — $\frac{1}{2}\alpha$. Die Schenkel werden sich in der Dreiecksspitze c schneiden. In c trage einen Winkel dcb = $\frac{1}{2}\beta$, so schneidet dessen Schenkel die zweite Spitze in b; und bildet man noch auf ce das gleichschenkliche Dreieck ace, dessen gleiche Schenkel gleich ac sind, so hat man das verlangte Dreieck in abc construirt. Fig. 212.

Beweis. Da, nach der Construction,

$$\angle dcb = cdb = \tfrac{1}{2}\beta$$

so ist das Dreieck cdb ein gleichschenkliches; und weil auch das Dreieck ace gleichschenklich ist, so hat man

$$ad = ab + bd = ab + bc$$

und $ed = ad - ae = ad - ac = ab + bc - ac.$

Ferner ist der Winkel abc, als äußerer $= \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta = \beta$ und $\llcorner cab = 2R - (aec + ace) = 2R - (2R - \alpha) = \alpha.$

166. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: eine Höhe, gleich h, die Differenz, gleich d', der Projectionen der Seiten, welche die Höhe einschließen, auf der dritten, und ein Winkel, welcher einer jener Seiten gegenliegt.

Man kann hier nachstehende Fälle annehmen:

1. Fall. Wenn der Winkel φ der größern Seite gegenliegt.

Fig. 213. Auflösung. Auf einer Geraden ab errichte eine Normale cd = h, ziehe em parallel ab und trage in c einen Winkel mcb $= \varphi$, so hat man die Seite bc bestimmt, deren Projection auf ab das Stück bd ist.

Die Projection der andern Seite ergiebt sich aus der Summe bd + d', die man von d nach a trägt, und abc ist dann das gesuchte Dreieck.

2. Fall. Wenn der gegebene Winkel γ der kleinern Seite gegenliegt.

Fig. 214. Auflösung. Man verfahre wie beim vorigen Fall, mache aber bc = ab — d'.

Beweis. Leicht.

167. Man soll ein Dreieck zeichnen, von welchem eine Höhe gleich h, die Summe der Projectionen, gleich s, auf der zur Höhe h gehörigen Grundlinie, und die Differenz d der Seiten, welche jene Projectionen bilden, gegeben sind.

Fig. 215. Auflösung. Mache ab gleich s, halbire sie in p und nehme am gleich ap $+ \frac{1}{2}$d. Hat man hierdurch den Fußpunkt m der Höhenlinie gefunden, so mache man diese gleich h, wodurch die Spitze c des gesuchten Dreiecks abc bestimmt wird.

Beweis. Leicht.

168. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: der Winkel φ, die Höhe aus dessen Spitze und das Verhältniß m : n der Projectionen der Seiten, welche jenen Winkel bilden, auf der dritten Seite.

Fig. 216. Auflösung. Man trage auf eine Gerade die beiden Linien m, n, welche das Verhältniß bestimmen, in df und ef, suche nach 236 den Mittelpunkt h eines Kreises, dessen in den Bogen dce stehende Peripheriewinkel gleich φ sind, errichte in f eine Normale, so wird diese den Bogen in c,

der Spitze des Dreiecks treffen. Macht man nun cg gleich h' und zieht ab parallel cd, so ist abc das gesuchte Dreieck.

Beweis. Aus 80, 57.

169. Der Winkel α, die Summe, gleich s, der ihn bildenden Seiten, und das Verhältniß n : o der Projectionen dieser Seiten auf der dritten sind gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung. Man verfahre nach voriger Aufgabe, um die Spitze c zu bestimmen, verlängere dann fc nach a', mache ca' = ci und ziehe a'i. Nimmt man ferner a'a = s, ziehe ab' ∦ fi und b'c' ∦ ci, so ist ab'c' das gesuchte Dreieck. Fig. 217.

Beweis. Wie der vorhergehende.

170. Man soll ein Dreieck zeichnen, wozu ein Winkel β, die Differenz der Projectionen von den ihn einschließenden Seiten auf die Gegenseite, gleich d, und die Summe jener Seiten gleich s gegeben sind.

Auflösung. Trage die gegebene Differenz d auf eine Gerade in bd, errichte eine Normale de, lege an diese den Winkel edh = β und halbire ihn durch dg. Diese Richtung dg schneide aus b mit einem Radius, gleich s, in g, ziehe gb und errichte in der Mitte n von bd eine Normale. Diese bestimmt auf bg die Dreieckspitze a. Zieht man nun mit dem Radius ag aus a einen Bogen, verbindet den Durchschnittspunkt c der Richtung bd mit a, so hat man in abc das gesuchte Dreieck. Fig. 218.

Beweis. $\llcorner$hdc = R — β
$\llcorner$gdc = R — β + $\frac{1}{2}\beta$ = R — $\frac{1}{2}\beta$
und $\llcorner$gac = 2 (R — $\frac{1}{2}\beta$) = 2 R — β
daher ist $\llcorner$cab = β.

Ferner ist
ab + ac = ab + ag = bg = s
und bf + cf = bf — df = bd = d,
sonach enthält das Dreieck abc die gegebenen Bedingungen.

171. Es ist ein Winkel mno und in seiner Ebene ein Punkt p gegeben; man soll auf den Schenkeln zwei Punkte so bestimmen, daß das Dreieck pqr ähnlich einem gegebenen abc werde.

Auflösung. Man bilde über ac einen Kreisabschnitt agdc, dessen Peripheriewinkel auf dem Bogen aec gleich dem gegebenen Winkel mno sind; trage den Winkel mnp in ace und ziehe die Richtung be, bis sie die Peripherie in d schneidet. Macht man dann die Winkel npq gleich Fig. 219, a, b.

dba und npr = dbc, so schneiden deren Schenkel in q und r die verlangten Punkte.

Beweis. Aus 80; 58, b.

172. In ein gegebenes Dreieck abc ein anderes zu zeichnen, welches einem gegebenen mno ähnlich ist, und mit den Eckpunkten auf den Seiten abc liegt.

Fig. 220, a, b. Auflösung. Man trage in a einen Winkel cab′ = α und in c einen dergleichen acb′ = β, so ist das Dreieck acb′ ähnlich mno. Verbinde b, b′ und ziehe durch den Durchschnitt o′, m′o′ ∦ ab′ und n′o′ ∦ b′c und dann m′n′: so ist auch das Dreieck m′n′o′ ähnlich mno.

Beweis. Leicht.

173. In ein gegebenes Dreieck abc ein anderes zu beschreiben, welches einem dritten mno ähnlich ist, seine Spitzen auf den Seiten des erstern und zwar die eine in dem gegebenen Punkte d hat.

Fig. 221, a, b. Auflösung. Ziehe dg beliebig, mache den Winkel hdg gleich onm und den dgh gleich nom; so ist das Dreieck dgh ähnlich dem nom.

Hierauf lege an dh den Winkel dhi = dga, ziehe de und mache ∟def = nmo, ziehe noch df: so ist das Dreieck def das gesuchte.

Beweis. Ist durch Annahme eines Dreiecks dg′e′ indirekt zu führen.

Nimmt man an, das Dreieck def sei nicht dem Dreieck dgh, sondern dem Dreieck dg′e′ ähnlich, so ist, wenn der Winkel gdh gleich g′de′,

$$g'd : gd = e'd : hd$$

Vermindert man genannte Winkel um den g′dh, so wäre ∟g′dg = hde′; folglich sind in den Dreiecken g′dg und hde′ die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, verhältnißgleich und die Dreiecke ähnlich; also der Winkel dgg′ = dhe′. Es ist aber der Winkel dgh = dhe; sonach müßte der Winkel dhe′ = dhe sein, welches unmöglich ist. Es kann daher das Dreieck dgh nicht ähnlich dem Dreieck dg′e′ sein, sondern ist ähnlich dem Dreieck mno.

174. In ein gegebenes Dreieck abc soll ein anderes gezeichnet werden, dessen Spitzen in den Seiten des erstern so liegen, daß die Seite m′n′ mit einer bc des erstern Dreiecks ein Winkel α bilde; und dabei soll das eingeschriebene einem dritten Dreieck mno ähnlich sein.

Fig. 222, a, b. Auflösung. Mache den Winkel cbp gleich α, zeichne auf bp, als Seite, ein Dreieck pbq, welches die drei Winkel des Dreiecks mno enthält, verbinde die Spitzen c, q, ziehe durch den Durchschnitt o′ eine Parallele mit pq und

eine zweite mit bq und noch m′n′: so erfüllt das Dreieck m′n′o′ die Forderungen.

Beweis. Das Dreieck bpq ist ähnlich dem onm, durch Construction. Der Winkel cm′n′ = cbp, und da auch die innern Winkel des Dreiecks m′n′o′ gleich sind denen des Dreiecks bpq, so sind beide Dreiecke ähnlich; folglich ist auch das Dreieck m′n′o′ ähnlich dem mno.

175. In einem Dreieck abc sollen drei Transversalen so gezogen werden, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, und daß je zwei von ihnen Winkel bilden, die gleich sind drei gegebenen α, β und γ. Fig. 223.

Auflösung. Man bilde auf den Seiten des Dreiecks abc gleichschenkliche Dreiecke abn, bcm und aco, deren Spitzen n, m, o die Winkel 2α, 2β, 2γ haben. Aus diesen Spitzen beschreibe man drei Kreise, welche die Seiten des Dreiecks einzeln als Sehnen aufnehmen. Der Durchschnittspunkt x dieser Kreise ist auch der Durchschnitt der gesuchten Transversalen, welche dann paarweise die gegebenen Winkel bilden.

Beweis. $\llcorner bna = 2\alpha$
$\llcorner bxa = 2R - \alpha$, als Supplement des gegenliegenden Winkels im eingeschriebenen Viereck.
$\llcorner bxa + axe = 2R$
also $\llcorner axe + 2R - (2R - a) = \alpha = \llcorner bxd$.
Eben so ist $\llcorner axf = \gamma = \llcorner dxc$
und $\llcorner fxb = \beta = \llcorner exd$

Denkt man sich die Centrale mn, so steht sie, nach 114, auf der gemeinschaftlichen Sehne normal und halbirt sie; daher ist das Dreieck bnx gleichschenklich, nx Radius des Kreises n, und x ein Punkt seiner Peripherie. Dasselbe findet sich beim Dreieck bmx, so daß x auch in der Peripherie des Kreises m liegt; und wegen derselben Beziehung beim Dreieck aox ist x auch ein Punkt der Peripherie vom Kreise o. Da nun x allen drei Kreisen gemein ist, so kann dieser Punkt nur in dem Durchschnitt dieser Kreise liegen.

1. **Anmerkung.** Sollen die Transversalen gleiche Winkel bilden, so construire man zwei gleichseitige Dreiecke z. B. abn′ und acp, halbire die Winkel durch bn, an und ao, co, und verfahre dann wie oben.

2. **Anmerkung.** Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die Summe der gegebenen Winkel $\lesseqgtr 2R$ ist.

Fig. 224. 176. Man soll ein Dreieck construiren, welches einem gegebenen Dreieck A ähnlich ist, und dessen Seiten oder deren Verlängerungen durch drei gegebene Punkte a, b, d gehen.

Auflösung. Man suche zuerst nach Aufgabe 175 den Punkt c, in welchem sich die Transversalen aus den drei gegebenen Punkten a, b, d (diese Punkte zu einem Dreieck verbunden gedacht), paarweise unter den Winkeln des gegebenen Dreiecks schneiden.

Jede andere Ternion Transversalen, z. B. bo, dm und an, welche einzeln mit den gefundenen gleiche Winkel bilden, geben in ihren Durchschnittspunkten o, m, n die Ecken eines Dreiecks, welches den gegebenen Bedingungen entspricht.

Würde man den Winkel so wählen, daß die Schenkel außerhalb des Dreiecks abd fielen, so würden nicht mehr die Verlängerungen der Dreiecksseiten, sondern diese selbst durch die gegebenen Punkte gehen.

Es lassen sich daher eine unbestimmbare Zahl von Dreiecken denken, welche die Forderung erfüllen.

Beweis. Zuerst nach Aufgabe 175, dann ist die weitere Ausführung leicht.

Anmerkung. Der Geodät findet in dem Dreieck nmo sein sogenanntes fehlerzeigendes Dreieck, welches beim Rückvisiren von den drei auf dem Meßtische bereits bestimmten Fixpunkten a, b, d entstehet, wenn die Orientirung ungenau genommen ist. Die Rückvisirungslinien bo, an, dm werden sich dann nicht in dem Punkte c schneiden, sondern jenes Dreieck bilden. Sie werden es aber, sobald der Meßtisch um den Winkel nag gedreht worden ist. Die vorhergehende und die nachfolgende Aufgabe bieten Mittel dar, diesen Fehler zu verbessern. Die specielle Beziehung auf gedachten Fall kann jedoch hier nicht weiter erörtert worden; sie gehört in das Gebiet der Geodäsie.

177. Innerhalb eines gegebenen Dreiecks mno den Punkt p zu finden, dessen Entfernungen von den Seiten sich verhalten, wie drei gegebene Linien q, r und t.

Fig. 225. Auflösung. Man trage die gegebenen Linien q in nf und r in ne, ziehe fg parallel mn und eg parallel no.

Dann trage auch t in ok und r in oh, ziehe ki parallel om und hi parallel on; lege durch o, i und n, g Richtungen, und es wird deren Durchschnitt p der verlangte Punkt sein, so daß

$$bp : ap : dp = r : q : t$$

Beweis. Zieht man die Normalen gx und gy und bemerkt die parallele Lage dieser mit den Linien bp und ap, und daß $\llcorner$neg = nfg ist; so folgt,

weil $\llcorner neg = R + egy$
und $\llcorner nfg = R + fgx$,
daß $\llcorner egy = fgx$.
Es ist also das Dreieck gey ähnlich dem Dreieck yfx.
Man hat nun
$gx : gy = gf : eg$
oder $gx : gy = ne : nf = r : q$.
Auch ist $pn : gn = bp : gx$
und $pn : gn = ap : gy$,
daher $bp : ap = gx : gy$
und auch $bp : ap = r : q$.
Durch ähnliche Schlüsse erhält man
$bp : pd = r : t$
und durch Verbindung dieser Proportionen
$bp : ap : dp = r : q : t$.

178. Man soll innerhalb eines gegebenen Dreiecks einen Punkt (m) finden, dessen Verbindungslinien mit den Ecken sich verhalten wie die Linien $a' : b' : c'$.

Auflösung. Man schneide auf ab die Stücke $ae = a'$ und $ad' = c'$ ab, mache den Winkel $aeg = adf = acb$ und construire über eg ein Dreieck, in welchem $gi = af$ und $ei = b'$ ist; ziehe die Richtung ai, bilde einen Winkel $\varphi = aie$, dessen Schenkel die gedachte Richtung in m schneiden und diesen Punkt als den gesuchten bestimmen wird. Fig. 226.

Beweis. Das Dreieck abm ist ähnlich aei, wegen der gleichen Winkel mba = aie und des gemeinschaftlichen iae;
daher $am : bm = ae : ei = a' : b'$.
Es ist aber auch $ab : am = ai : ae$,
also $ab . ae = am . ai$.
Ferner ist wegen der ähnlichen Dreiecke aeg und abc
$ab : ac = ag : ae$,
also $ab . ae = ac . ag$,
daher $ac . ag = am . ai$,
und da $\llcorner mac = iag$ ist,
so ist das Dreieck acm ähnlich agi, und man hat
$am : cm = ag : ig = ag : af$.
Weil auch das Dreieck age ähnlich afd,
so wird $ag : af = ae : ad = a' : c'$
und $am : cm = a' : c'$,
folglich $am : bm : cm = a' : b' : c'$,

179. Um ein gegebenes Dreieck abc ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten durch die Spitzen des erstern ge-

hen; und zwar so, daß diese Spitzen in den Fußpunkten der Höhen des zweiten Dreiecks liegen.

Fig. 227. Auflösung. Mache den Winkel c'ca = R — ½ bca, den Winkel c'ac = R — ½ cab und den Winkel a'ba = R — ½ abc. Die verlängerten Schenkel dieser Winkel bilden das verlangte Dreieck a'b'c'.

Beweis. Da ∟c'ca = R — ½ bca,
so ist ∟c'ca + ½ bca = R.
Dasselbe gilt von den Winkeln c'ab' und a'bc'.

Es halbiren aber die Normalen, der Construction nach, zugleich die Winkel des gegebenen Dreiecks, also müssen ihre Fußpunkte in den Spitzen liegen.

Fig. 228, a, b. 180. Es ist ein Dreieck mno gegeben, man soll ein ähnliches zeichnen, dessen Seiten von einem Punkt p innerhalb die gegebenen Linien m', n', o' zum Abstand haben.

Auflösung. An den Punkt p trage man einen Winkel dpe, gleich dem Supplement von omn, und daran einen zweiten epf, gleich dem Supplement von onq; mache pd = m', pe = n' und pf = o', ziehe durch d, e und f Normalen auf die Schenkel: so werden diese gehörig verlängert das gesuchte Dreieck bilden.

Beweis. Da die Winkel adp und aep rechte sind, epd aber Supplement von omn, so muß der Winkel bac = omn, und gleichmäßig der Winkel acb = onm, folglich das Dreieck abc ähnlich omn sein.

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben, Parallelogramme und andere Vierecke, ihren Linienbeziehungen nach, betreffend.

A. Von den Quadraten insbesondere.

181. Ueber einer gegebenen Linie ab ein Quadrat zu zeichnen.

Fig. 229. 1. Auflösung. Errichte eine Normale bc = ab, beschreibe mit einem Radius, gleich ab, aus c einen Bogen bei d und schneide ihn aus a mit demselben Radius.

Beweis. Aus 36, 76.

2. Auflösung. Errichte in den Endpunkten der gegebenen ab Normalen, mache jede gleich ab und verbinde c, d.

Beweis. Aus 36, 15 a.

3. Auflösung. Beschreibe aus a und b mit einem Radius, gleich ab, Kreisbogen, schneide den einen aus e mit demselben Radius in f, ziehe bf und beschreibe noch aus e mit einem Radius gleich eg einen Bogen, der die erstern in c und d, den Ecken des Quadrats, schneidet. Fig. 230.

Beweis. Der Bogen ae = be ist, nach 104., $\frac{1}{6}$ der Peripherie vom Radius ab, also das durch die Halbirungslinie bf abgeschnittene Stück ag gleich $\frac{1}{12}$ der Kreislinie. Der Bogen ed = eg = ag = $\frac{1}{12}$, daher der Bogen ad = 3 . $\frac{1}{12}$ = $\frac{1}{4}$ der Peripherie und folglich der Winkel abd = bad = R; und aus 76, ac = bd = ab.

4. Auflösung. Halbire ab durch op, beschreibe aus q über ab einen Halbkreis, ziehe die Richtungen bm, am und mache md = cm = am. Die Endpunkte c, d sind die übrigen Ecken des Quadrats. Fig. 231.

Beweis. Aus 89, 38, 36.

182. Ein Quadrat zu zeichnen, wenn die Summe einer Seite und Diagonale, gleich s, gegeben ist.

Auflösung. An cg = s trage einen Winkel bcg = $\frac{1}{2}$ R, an das andere Ende einen dergleichen cgb = $\frac{1}{4}$ R; so ist der Durchschnittspunkt b der Schenkel die eine und c die andere Ecke des Quadrats. Schneidet man mit einem Radius, gleich bc die Diagonale ac in a und ergänzt das Quadrat, so ist ac + ab = s. Fig. 232.

Beweis.	$\angle$acb = $\frac{1}{2}$ R
	cb = ab,
also	$\angle$cab = $\frac{1}{2}$ R
und	$\angle$abc = R.
Ferner ist	$\angle$bag = $\frac{3}{4}$ R
und	$\angle$agb = $\frac{1}{4}$ R,
daher	$\angle$abg = $\frac{1}{4}$ R
und	ab = ag,
folglich	ac + ab = ac + ag = s.

183. Ein Quadrat zu zeichnen, wenn die Differenz, gleich d, einer Seite und Diagonale gegeben ist.

Auflösung. Man zeichne ein Quadrat, dessen Seite gleich d ist, ziehe die diagonale Richtung do und mache bn gleich ba; so ist dn die Seite des gesuchten Quadrats. Fig. 233.

Schneidet man mit dieser aus n die Verlängerung ad in m und bestimmt noch die Ecke p; so ist pmnd das verlangte Quadrat.

Beweis.	$\angle$ndm = $\frac{1}{2}$ R
	dn = mn,
also	$\angle$nmd = $\frac{1}{2}$ R
und	$\angle$dnm = $\frac{1}{2}$ R.

Ferner ist $\llcorner$nba $= \frac{3}{2}$ R
und weil bn $=$ ba,
so ist $\llcorner$bna $=$ ban $= \frac{1}{4}$ R
und $\llcorner$anm $= \frac{3}{4}$ R $=$ nam;
daher mn $=$ am $=$ dn
und dm $-$ am $=$ dm $-$ dn $=$ ad $=$ d

184. Es sind zwei Punkte h und i gegeben, man soll mit Hülfe des Zirkels allein die andern beiden Punkte k, l finden, die mit den erstern verbunden ein Quadrat bilden.

Fig. 234. Auflösung. Man nehme den Abstand hi als Radius und beschreibe aus beiden gegebenen Punkten Kreise. Auf diese trage den Radius als Sehne in ia, ac, cf und auch in ae, cd; beschreibe aus h mit dem Radius he und aus d mit da Bogen, und durch ihren Durchschnitt b ebenfalls einen Bogen aus i, so ist in k ein dritter Eckpunkt des Quadrats gefunden, und ein Bogen aus k, mit dem Radius hk beschrieben, giebt den vierten in l.

Beweis. Nach 76 ist ih $=$ il. Da der Bogen ha $=$ ac $=$ cd, und dessen Mittelpunktswinkel gleich $\frac{2}{3}$ R, nach 104 und 103, so ist der Bogen ha $+$ ac $+$ cd ein halber Kreis, also hid ein gestreckter Winkel und hd $= 2$ hi. Der Radius he $=$ hb $=$ ad $=$ bd ist als Sehne die Seite eines gleichseitigen Dreiecks in einem Kreise von dem Radius ih; also ist auch

$$he_q = hb_q = ad_q = db_q$$

und weil hi Halbmesser ist, auch gleich $3 \cdot hi_q$, nach 108.

Da aber, durch Construction des Punktes b, die Richtung bi Halbirungslinie des Halbkreises und auch des Bogens ae ist, so wird die Summe der Bogen ha $+$ al ein Viertelkreis, also der Winkel lih gleich R, und ein gedachtes Dreieck bih wird congruent einem Dreieck bid sein.

Daher ist $ib_q = hb_q - hi_q$, nach 47.

$$ib_q = 3\,hi_q - hi_q = 2\,hi_q$$

Folglich, weil ik $=$ ib, wird auch $ik_q = 2 \cdot hi_q$ und hilk ein Quadrat sein.

185. In ein gegebenes rechtwinklich gleichschenkliches Dreieck ein Quadrat zu zeichnen, wovon zwei Seiten auf den Katheten und eine Spitze auf der Hypotenuse liegen.

Auflösung. Halbire den rechten Winkel und ziehe durch den Durchschnittspunkt der Hypotenuse Parallelen mit den Katheten.

Beweis. Leicht.

186. In dasselbe Dreieck ein Quadrat zu zeichnen, welches mit einer Seite auf der Hypotenuse, mit zwei Ecken auf den Katheten liegt.

Auflösung. Man theile die Hypotenuse in drei gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten Normalen und verbinde deren Durchschnitte auf den Katheten unter sich und mit den Theilpunkten der Hypotenuse.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale, dann aus 27, 25.

187. In ein schiefwinkliches Dreieck ein Quadrat zu zeichnen.

Auflösung. Fälle aus einer Spitze c eine Normale und bilde mit dieser ein Quadrat cdqr. Dessen Ecke r verbinde mit der Dreiecksspitze b nnd ziehe durch den Durchschnittspunkt m die Seiten des gesuchten Quadrats mn ╪ ab, mo und pn ╪ cd. Fig. 235.

Beweis. 58, 60.

188. In ein Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten sich verhalten wie m : n.

Auflösung. Man verfahre wie in der vorigen Aufgabe, bilde aber statt des Quadrats cdrq ein Rechteck, dessen ungleiche Seiten das gegebene Verhältniß haben.

Beweis. Wie bei Aufgabe 187.

189. In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, welches mit dem erstern einen Eckpunkt gemein hat, dessen andere Ecken aber in den Seiten des Quadrats liegen.

Auflösung. Bilde mit einer Seite om des Quadrats ein gleichseitiges Dreieck moc, ziehe die Richtung nc bis zum Durchschnitt mit op, mache bm gleich pa und ziehe ab und bn. Fig. 236.

Beweis. Die rechtwinklichen Dreiecke pan und bnm, sind congruent, daher an = bn.

Der Winkel $cmo = \frac{2}{3}R$

$\llcorner cmn = R - \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$

und weil $cm = mn$,

so ist $\llcorner cnm = \frac{2R - \frac{1}{3}R}{2} = \frac{5}{6}R.$

und $\llcorner pna = bnm = R - \frac{5}{6}R = \frac{1}{6}R.$

Daher $\llcorner anb = R - 2 . \frac{1}{6}R = \frac{2}{3}R.$

190. In ein Quadrat ein reguläres Achteck, durch Abstumpfen der Ecken, zu zeichnen.

Auflösung. Aus den vier Ecken des Quadrats beschreibe mit einem Radius, gleich der halben Diagonale, Bogen; welche die Seiten des Quadrats in den Ecken des gesuchten Achtecks o, p, q, r .... schneiden werden.

Beweis. Zieht man uo, un und um, so ist Fig. 237.

$\llcorner$ nbu $= \frac{1}{2}$ R,
und $\llcorner$ aun $= \frac{1}{2}$ nbu $= \frac{1}{4}$ R, nach 90 und 88.
Da aber bn = ao
so ist bn — on = ao — on
d. i. bo = na.
Auch ist bu = au
und $\llcorner$ obu = nau,
folglich das Dreieck bou congruent anu und auch amu.
Hieraus folgt, daß
$\llcorner$ buo = aun = aum = $\frac{1}{4}$ R
$\llcorner$ oun = R — 2 . $\frac{1}{4}$ R = $\frac{1}{2}$ = R $\llcorner$ num.
Man sieht also, daß diese beiden, so wie die übrigen gleichliegenden Winkel, Mittelpunktswinkel eines regulären Achtecks sind, und aus der Congruenz der übrigen Dreiecke oun, num ..., daß auch on = nm = mt .... ist.

B. Von andern Rechtecken und den übrigen Parallelogrammen.

191. Ueber einer gegebenen Linie ab mit einer andern, gleich m, ein Rechteck zu bilden.

Fig. 238. 1. Auflösung. Wie Aufgabe 181, 1. Auflösung, nur mit dem Unterschied, daß man die Radien verschieden und jeden einer ungleichen Seite des Rechtecks gleich nimmt.

2. Auflösung. Wie Aufgabe 181, 2. Auflös. mit der so eben bemerkten Abänderung.

Beweis. Leicht.

192. Ein Rechteck zu zeichnen, wenn eine Seite, gleich m, und die Diagonale, gleich d′, gegeben sind.

Fig. 239. Auflösung. Mache ab gleich m, errichte in a eine Normale und schneide diese aus b mit einem Radius, gleich d′ in c; so ist dann das Rechteck abcd leicht zu ergänzen.

Beweis. Leicht.

193. Ein Rechteck zu zeichnen, wenn die Summe der anstoßenden Seiten, cd + ad, gleich s, und eine Diagonale, gleich d′, gegeben sind.

Fig. 240, a, b. 1. Auflösung. Da eine Diagonale das Rechteck in zwei congruente rechtwinkliche Dreiecke theilt, so kann man das eine nach Aufgabe 87 oder unmittelbar das Rechteck nach Fig. 240, a. suchen.

2. Auflösung. Man ziehe Fig. 240, b. die Gerade ac gleich d′, beschreibe einen Kreis, dessen Durchmesser ac ist, fälle aus c eine Normale cf = ac, ziehe af und beschreibe über letzterer einen Halbkreis; schneide diesen aus a mit einem Radius, gleich s, in g, ziehe die Richtung ga

und ergänze mit der, im Durchschnitt des Kreises und jener Richtung liegenden, Ecke d das Rechteck abcd.

Beweis. Da ac = cf, so ist das Dreieck acf gleichschenklich, und weil $\llcorner$acf = R, so ist $\llcorner$cfa = caf = $\frac{1}{2}$ R.

Es ist aber $\llcorner$cga = cfa $\frac{1}{2}$ R, nach 80.
und da nach 89. $\llcorner$cda = R = $\llcorner$cdg
so ist auch $\llcorner$dcg = $\frac{1}{2}$ R
also das Dreieck cdg gleichschenklich.

Es war aber ag = ad + dg = s.
folglich ad + cd = s.

Anmerkung. Berührt der mit ac, Fig. 240, a. beschriebene Bogen die Richtung ef, ohne sie zu schneiden, so ist der Berührungspunkt die Ecke und das Rechteck ein Quadrat.

Erreicht der Bogen ef nicht, so sind die Bedingungen unmöglich gestellt, weil dann die Hypotenuse kleiner als jede der Katheten wäre.

194. Aus der Differenz der Seiten, gleich d′, und der Differenz der Winkel an der Diagonale, gleich δ, das Rechteck zu bilden.

Auflösung. Man trage auf eine Gerade die gegebene Differenz der Seiten in ae, bilde den Winkel fac = $\frac{1}{2}$ (R — δ) und in e einen solchen fec = $\frac{1}{2}$ R. Der Durchschnittspunkt c der Schenkel ist eine Ecke des gesuchten Rechtecks und dasselbe läßt sich nun leicht ergänzen, wenn man aus c eine Normale fällt u. s. w. Fig. 241.

Beweis. Leicht.

195. Aus der Summe, gleich s, der Diagonale und einer Seite, und dem Winkel η, den beide einschließen, das Rechteck zu construiren.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade ac gleich s, lege an diese einen Winkel dae = R — η und einen andern dea = $\frac{1}{2}\eta$, so erhält man im Durchschnitt der Schenkel einen Eckpunkt d des gesuchten Rechtecks abcd und kann dieses leicht ergänzen. Fig. 242.

Beweis. Leicht.

196. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn die beiden Diagonalen, gleich x und y, und eine Seite, gleich z, gegeben sind.

Auflösung. Man bilde auf bd = z mit den halben Diagonalen do und bo ein Dreieck, verlängere die beiden letztern Seiten und mache bc gleich y und da = x. Fig. 242.

Durch Verbindung der Endpunkte ergiebt sich das Parallelogramm abcd.

Beweis. Aus 36.

197. Einen Rhombus zu zeichnen, wenn eine Seite, gleich n, und ein Winkel δ gegeben sind.

Fig. 245. Auflösung. Mache ab gleich n, trage in einen der Endpunkte einen Winkel cab $= \delta$, dessen Schenkel ac gleich n ist, und beschreibe aus b und c Bogen mit einem Radius, gleich der gegebenen Seite. Deren Durchschnittspunkt ist die vierte Ecke des Rhombus abcd.

Beweis. Leicht.

198. Einen Rhombus zu zeichnen, wenn ein Winkel, gleich β, und die Diagonale, gleich m, durch dessen Spitze

Fig. 246. gegeben sind.

Auflösung. Man bilde einen Winkel cae $= \beta$, halbire ihn durch ad und mache ad gleich m; ziehe dann cd parallel ae und bd parallel ac, so ist abcd der verlangte Rhombus.

Beweis. Leicht.

199. Einen Rhombus zu zeichnen, wenn eine Diagonale gleich m, und ihr gegenliegender Winkel α gegeben sind.

Fig. 247. Auflösung. Auf der Mitte von wy $=$ m errichte eine Normale xz, lege an selbige einen Winkel uvx $= \frac{1}{2}\alpha$ beliebig, ziehe wz und yx parallel dessen Schenkel vu, und ergänze den Rhombus durch yz und xw.

Beweis. Leicht.

200. Einen Rhombus zu zeichnen, wenn seine beiden Diagonalen, gleich d′ und d″, gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe ac $=$ d″, errichte in deren

Fig. 248. Mitte o eine Normale bd, mache ob gleich od $= \frac{1}{2}$ d′ und verbinde abcd zu dem gesuchten Rhombus.

Beweis. Leicht.

201. Es ist eine Seite, gleich, m und die Höhe auf diese Seite, gleich h, gegeben, man soll den Rhombus zeichnen.

Fig. 249. Auflösung. Auf ab $=$ m errichte eine Normale, gleich h, ziehe nd parallel ab und schneide nd aus b mit einem Radius, gleich m, in d, so ist abcd der gesuchte Rhombus.

Beweis. Leicht.

202. Aus der Summe der Diagonalen, gleich s, und einer Seite, gleich m, soll der Rhombus construirt werden.

Fig. 250. Auflösung. Ziehe eine Gerade bg und trage $\frac{1}{2}$ s in gd; in d errichte die Normale dk und halbire den Winkel gdk durch dh; schneide die Halbirungslinie aus g mit einem Radius, gleich m, in a, errichte in der Mitte von ad eine Normale ci, so bestimmt diese auf bg den Durchschnittspunkt

der Diagonalen. Nach 36 ist der Rhombus dann leicht zu bilden.

Beweis. Da gd gleich $\frac{1}{2}$ s, d. i. $\frac{1}{2}$ bg + $\frac{1}{2}$ af, so muß das Dreieck adi ein rechtwinklich gleichschenkliches sein. Es ist daher $gi + id = gi + ia = \frac{1}{2} s$
und $2(gi + id) = 2(gi + ia) = bg + af = s$.

203. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe seiner Diagonalen gleich s und einer der Winkel gleich α gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade an, schneide sie mit einer Normale bm, mache qn gleich $\frac{1}{2}$ s und trage in n einen Winkel $qnm = \frac{1}{2}\alpha$. Man halbire dann den rechten Winkel durch qo und ziehe $oc \ddagger an$, $cd \ddagger mn$. Fig. 251.

Der Rhombus abcd ergänzt sich nun leicht durch Parallelen mit oq und cd.

Beweis. In der Linie $qn = \frac{1}{2}s$ liegen die halben Diagonalen qd und qc als Summanden. Der Winkel mna ist durch Construction gleich $\frac{1}{2}\alpha = ocd = cda$.
Daher ist $\llcorner cda + adb = \alpha = cab$.
Ferner ist $\llcorner oqc = \frac{1}{2} R = qoc$,
also das Dreieck coq gleichschenklich und $oc = cq$.
Nun ist aber $qn = qd + dn = qd + co = qd + cq = \frac{1}{2} s$

Folglich sind qd und cq die halben Diagonalen und, weil $\llcorner dqc = R$, so muß die Figur ein Rhombus sein, wovon cd eine Seite ist.

204. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe, gleich s, der Seite und der Diagonale, welche die spitzen Winkel theilt und der spitze Winkel α gegeben sind.

Auflösung. Ziehe $mr = s$, lege in m einen Winkel $rmt = \frac{1}{2}\alpha$ und in r einen solchen mrs von gleicher Größe; halbire letztern durch rn, so giebt der Durchschnittspunkt n einen Eckpunkt des Rhombus und m einen zweiten. Bildet man auf nr ein gleichschenkliches Dreieck, wovon eine gleiche Seite in rm fällt, so erhält man in p einen dritten Eckpunkt, so daß sich nun der vierte o leicht bestimmen läßt. Fig. 252.

Beweis. Der Winkel rmn ist gleich $\frac{1}{2}\alpha$ gemacht worden, daher sind, nach 36, mr, mn und mo die Richtungen der Diagonale und zweier Seiten des Rhombus.

Der Winkel mrn ist durch Construction gleich $\frac{1}{4}\alpha$ und, wegen des gleichschenklichen Dreiecks, gleich rnp.

Also ist $\llcorner rnm = 2R - \frac{3}{4}\alpha$, nach 23.
$\llcorner rnt = \frac{3}{4}\alpha$,
daher $\llcorner pnt = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha = \alpha$
und sein Supplement $= pnm = 2R - \alpha$;

folglich ist, nach 14, pn parallel mo, und Richtung der Seite des Rhombus.

Es ist aber auch $pr = pn$,

daher $mp + pr = mp + pn = s$

205. Es ist die Summe, gleich s, einer Seite und Höhe, nebst einem Winkel ω gegeben, man soll den Rhombus construiren.

Fig. 253. Auflösung. Man bilde einen rechten Winkel eam, mache ae gleich s, trage in a einen Winkel $eaf = \frac{1}{2}(R - \omega)$, ziehe mit am die Parallele ef und durch den Durchschnitt f die Parallele fi mit ae; construire den Winkel $bam = \omega$ und ergänze den Rhombus abcd.

Beweis. Nach der Construction ist

$$\llcorner eaf = \tfrac{1}{2}(R - \omega)$$

also $$\llcorner fam = \tfrac{1}{2} R + \tfrac{1}{2}\omega$$

und $$\llcorner fab = \tfrac{1}{2}(R - \omega) = afb.$$

Daher ist $ab = bf$;

und weil $ae = fi = s$,

so hat man $fi - bf = s - ab = bi$ als Höhe des Rhombus.

Fig. 254. 206. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe, gleich s, einer Seite und derjenigen Diagonale, welche durch die spitzen Winkel geht, und der stumpfe Winkel β gegeben sind.

Auflösung. Trage die gegebene Summe auf eine Gerade dk und in k einen Winkel $mkd = R$; dann an mk einen Winkel $mkn = \frac{1}{2}\beta$ und die Differenz $nkd = R - \frac{1}{2}\beta$ in ndk.

Halbirt man nun den Winkel nkd durch kb, so erhält man in dem Durchschnittspunkt b eine zweite Ecke des Rhombus und kann ihn mittelst der Seite bd, der Normale bo und aus den Sätzen 36 und 38 leicht ergänzen.

Beweis. Durch Construction ist

$$\llcorner nkd = R - \tfrac{1}{2}\beta = \frac{2R - \beta}{2}$$

und $$\llcorner bkd = \frac{2R - \beta}{4}$$

desgleichen $$\llcorner bdk = nkd = \frac{2R - \beta}{2} = kdg.$$

Daher ist $\llcorner dgc = \beta$.

Ferner ist $dk = dc + ck$

und, weil durch Construction dc die Diagonale durch die spitzen Winkel ist, so muß $ck = cd$, gleich der Seite des Rhombus sein.

Anmerkung. Man kann den Rhombus auf verschiedene Weise ergänzen, sobald man die Richtung und die Länge der Seite db gefunden hat. Auch stehen mehrere Mittel zu Gebot um den Winkel bdk, d. i. das Supplement von β zu erlangen.

C. Von den Vierecken, welche nicht Parallelogramme sind.

207. Zur Construction eines Trapezes sind gegeben: eine der parallelen Seiten, gleich m, die Höhe gleich h und zwei, jener Seite anliegende Winkel α und β.

Auflösung. An ab = m trage die Winkel cab = α und dba = β, errichte beliebig eine Normale an = h und ziehe durch n eine Parallele mit ab. Fig. 255.

Beweis. Leicht.

208. Man soll ein Trapez zeichnen, worin ein rechter Winkel, dessen eine Kathete gleich m, die dem rechten Winkel gegenliegende Diagonale gleich n und der andere Winkel an m gleich α gegeben sind. Fig. 256.

Auflösung. Hat man ab gleich m und db normal ab gemacht, so schneide man aus a mit einem Radius, gleich n, die Normale in d, lege in a den Winkel bac = α und ziehe cd parallel ab.

Beweis. Leicht.

209. Aus drei Seiten, gleich a, b und d, und den beiden Diagonalen, gleich d' und d'', das Viereck zu construiren.

Auflösung. Auf einer Geraden gleich d bilde mit den gegebenen Linien a und d'' ein Dreieck, auf der Seite a ein anderes mit den Linien d' und b und schließe dann das Viereck durch Verbindung der Spitzen. Fig. 257.

Beweis. Leicht.

210. Ein Viereck zu zeichnen, dessen vier Seiten a, b, e, c in genannter Folge und eine Diagonale d durch die Endpunkte der Seiten a und b gegeben sind.

Auflösung. Man bilde über der Seite a ein Dreieck mit der Diagonale d und der Seite b; auf d aber ein zweites mit den gegebenen Seiten c und e, so daß nach einerlei Richtung die vier Seiten in der gegebenen Folge zu liegen kommen. Fig. 258.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Dieses Verfahren ist allgemein auf necke zu beziehen, wenn die Größe und Folge der Seiten a, a', a''. . . . und die der Diagonalen d', d'', d'''. . . . gegeben sind; so daß die beziehlichen Stücke hinreichen, jedes einzelne der n — 2 Dreiecke zu bestimmen. Fig. 259.

Die Beweise ergeben sich für die einzelnen Dreiecke einfach aus 27 c, und daraus, daß jedes n eck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in n — 2 Dreiecke zerlegt werden kann.

211. Es sind drei Seiten gleich a′, b′, c′ und die an der vierten Seite liegenden Winkel α und β gegeben; man soll das Viereck zeichnen.

Fig. 260. Auflösung. Bilde einen Winkel dab = α, mache ad = a′, lege in einen beliebigen Punkt von ab den Winkel ega = β und mache eg gleich c′. Dann ziehe ef parallel ab und schneide aus d diese Parallele mit einem Radius gleich b′ in c. Zieht man noch durch c eine Parallele mit eg, so ist abcd das verlangte Viereck.

Beweis. Leicht.

212. Aus drei Seiten n, o, m, einer Diagonale d und einem Winkel α das Viereck zu bilden.

Diese Aufgabe läßt drei Fälle zu:

Fig. 261. 1. Fall. Wenn der gegebene Winkel der Diagonale gegenliegt.

Auflösung. Man bilde den Winkel cfb = α, mache einen Schenkel bf gleich n und schneide aus b den andern Schenkel mit einem Radius, gleich d; ziehe bc und construire über diese Diagonale mit den gegebenen Seiten m und o ein Dreieck, so daß die Folge der Seiten den Bedingungen entspricht.

Fig. 262. 2. Fall. Wenn der gegebene Winkel von der Diagonale getheilt wird, die Seiten aber die vorige Folge beibehalten, so daß nur eine bekannte Seite auf den Schenkeln des Winkels liegt.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel dca = α mache den Schenkel ac gleich p und bilde auf ac mit q und d′ ein Dreieck abc. Schneidet man dann aus b mit einem Radius, gleich r, den Schenkel cd in d, so ist abcd das gesuchte Viereck.

Fig. 263. 3. Fall. Wenn der gegebene Winkel von zwei gegebenen Seiten gebildet wird und die Diagonale durch dessen Spitze geht.

Auflösung. Wenn der Winkel cba = α gebildet worden ist, so mache man die Schenkel bc gleich o und ab gleich m; beschreibe aus a mit einem Radius, gleich n, einen Bogen und schneide ihn aus b mit einem Radius, gleich der Diagonale d′. Verbindet man noch d mit a und c, so ist das Viereck construirt.

213. Man soll ein Viereck zeichnen, wozu zwei Gegenseiten gleich a und b, zwei an a liegende Winkel α und γ und ein dritter φ, welcher α gegenliegt, gegeben sind.

Auflösung. Man trage einen Winkel gch $= \varphi$ auf, mache den Schenkel cg gleich b, und zeichne in einem beliebigen Punkt des andern Schenkels einen Winkel khc $= \gamma$, auf dessen Schenkel man die gegebene a in hi, und auch einen Winkel hkl $= \alpha$ trägt. Nun ziehe man gf ╪ kl, if ╪ ch und fd ╪ hk, so wird das Viereck cdfg die gegebenen Stücke enthalten. Fig. 264.

Beweis. Leicht.

214. Ein Viereck zu construiren, wenn gegeben sind: zwei Seiten, gleich a und b, der von ihnen gebildete Winkel, gleich δ, und die beiden Winkel α und β, welche von der Diagonale, die den Winkel δ theilt, mit den beiden Seiten des Vierecks gebildet werden.

1. Auflösung. Man construire mit den gegebenen Stücken, dem Winkel δ und den Seiten a und b, das Dreieck nmp; mache den Winkel mnq gleich β und den qnr gleich α. Suche, nach Aufgabe 255, den Kreis, welcher durch m geht und die Linie nr in n berührt; ziehe durch dessen Durchschnitt s mit dem Schenkel nq und durch p eine Richtung, die den Kreis nochmals in o schneiden wird, und verbinde o mit m und n, so ist das verlangte Viereck in ompn gefunden. Fig. 265.

Beweis. Aus 80 und 90.

2. Auflösung. Bilde mit dem gegebenen Winkel γ und den Seiten a und b ein Dreieck nmq, worin diese Seiten den Winkel γ einschließen; lege in n einen Winkel onm $= \beta$, und in m einen omn $= \alpha$ und suche einen Kreis der m, n und den Durchschnittspunkt o in die Peripherie aufnimmt (nach Aufgabe 227). Fig. 266.

Nun ziehe eine Richtung oq, die den Kreis nochmals in p schneiden wird, verbinde n, p, m, so ist pnqm das gesuchte Viereck.

Beweis. Der Winkel nqm, so wie die Seiten qn und mq, sind den gegebenen gleich gemacht. Ferner ist der Winkel mpo $=$ onm $= \beta$, und der Winkel npo $=$ omn $= \alpha$.

Beides sind aber die Winkel an der Diagonale, die den Winkel γ schneidet; folglich enthält das Viereck pnqm die gegebenen Stücke. Fig. 267, a, b.

3. Auflösung. Man bilde einen Winkel abi $= \gamma$ und mache ab gleich a, bi gleich b. In i trage man einen zweiten Winkel kib $= \alpha$, und in a einen dritten bag $= \beta$; halbire ab in f und bi in h; errichte in den Mitten die

Normalen fe und hc, in a und i aber die Normalen ae auf ag und ic auf ik. Aus dem Durchschnittspunkte c beschreibe mit Radius ci einen Kreis, welcher die Punkte e und b aufnehmen wird, und aus e einen solchen, mit dem Radius ea, der durch a und b geht; verbinde noch ihren Durchschnittspunkt d mit a und i, so ist abid das verlangte Viereck.

Beweis. Da ag Tangente des Kreises e im Berührungspunkte a ist, so ist der Winkel bda = bag = β; und weil ki Tangente des Kreises c im Berührungspunkte i ist, so ist der Winkel idb = kib = α.

Daher sind die Winkel an der Diagonale bd den gegebenen gleich. Der Winkel abi und die Seiten ab, bi sind bereits durch Construction bestimmt und so ist abdi das Viereck, welches den Bedingungen entspricht.

1. **Anmerkung.** Diese Aufgabe ist in der praktischen Geometrie von wesentlichem Nutzen. Sie heißt nach ihrem ersten Bearbeiter die Pothenotsche Aufgabe.

Fig. 266. Es sind z. B. drei Punkte n, q und m, ihrer Lage und Entfernung nach, bestimmt; man hat auch die Winkel α und β an p gemessen, verlangt aber die Entfernungen pn, pq und pm zu wissen.

Oder: man hat die Punkte n, q, m als feste Punkte bereits auf dem Meßtische, und will die beziehliche Lage eines zufälligen Punktes p, als momentanen Standpunktes, auf den Tisch projiciren, um die Mensel genau orientiren und von p aus operiren zu können. Es bedarf dann nur, daß man von einem beliebigen Punkt des Menselblattes die Winkel α und β anvisirt und zeichnet, und dann die obige Aufgabe constructionell ausführt, oder trigonometrisch löset.

2. **Anmerkung.** Ist die Summe der drei bekannten Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ gleich 2 R, so reichen die gegebenen Stücke zu Bestimmung des Vierecks nicht aus.

Es liegen dann alle vier Punkte in einer Kreislinie und jeder andere Punkt der Peripherie bildet mit den gegebenen ein Viereck, welches den Forderungen entspricht.

215. Die Summe der drei Seiten bc + cd + da gleich s, die vierte ab = a' und die Winkel α, β, γ und δ sind gegeben; man soll das Viereck zeichnen.

Fig. 268. **Auflösung.** Man bilde an ab = a' die Winkel dab = α und cba = β, mache ai gleich s und lege in a einen Winkel gal = δ, dessen Schenkel den bk in e schneiden wird.

Den entstandenen Winkel aeb halbire man durch ef, mache ag = ai = s, ziehe gi, bh parallel ef, und durch

den Durchschnitt h die Parallele dh mit ag; so erhält man in abcd das gesuchte Viereck.

Beweis. Durch Construction sind die Winkel α und β unmittelbar, der Winkel δ durch seinen Gegenwinkel gal bestimmt. Denkt man vorläufig dh als Richtung der Seite dc, so ist nothwendig der Winkel dcb gleich γ; und weil dh parallel ag, auch $\angle aeb = \gamma$

$$\angle aef = chb = cbh = \tfrac{1}{2}\gamma$$

und das Dreieck cbh ein gleichschenkliches.

Daher hat man dc + ch = dc + cb = dh.

Ferner ist $\angle iag = 2R - \delta$

also, da ag = ai, und dh ╪ ag,

$$\angle agi = aig = dhi = \tfrac{1}{2}\delta$$

und auch das Dreieck dih ein gleichschenkliches.

Folglich ist dh = di = dc + bc

und ai = ad + dc + bc = s.

216. Es sind zur Construction eines Vierecks gegeben: eine Seite, gleich m′, die beiden anliegenden Winkel φ und ψ, und das Verhältniß der übrigen Seiten

$$ad : dc : cb = m : n : o.$$

Auflösung. Trage an ab = m′ die gegebenen Winkel eab = φ und fba = ψ, auf ae die Linie m in ag und auf bf die zweite o in bi; ziehe ik parallel ab, schneide aus g mit einem Radius, gleich n, die Parallele ik in h, ziehe die Richtung ah bis zum Durchschnitt mit bf, und noch hg. Legt man zuletzt eine Parallele mit hg durch c, so ist abcd das verlangte Viereck. Fig. 269.

Beweis. Leicht, aus 57.

Anmerkung. Sind, nebst den übrigen Stücken, die nicht anliegenden Winkel gegeben, so werden die nöthigen Abänderungen ohne Schwierigkeit zu finden sein.

217. Ein Viereck zu zeichnen, wenn die Summe zweier Seiten gleich s, die Diagonale, welche zwischen diesen Seiten liegt, gleich t, und die Winkel α, β, γ, δ gegeben sind.

Auflösung. Man bilde die Winkel eaf = α und aef = δ, mache eg gleich s und ziehe gh parallel ae. In g trage den Winkel egi = γ, wodurch der Winkel aig gleich β wird; mache gk gleich gi und ziehe ik. Fig. 270, a.

Dann ziehe gl ╪ ik und ml ╪ gi, wodurch die Richtung ef oder deren Verlängerung in m geschnitten wird. Ziehe ferner mh, schneide aus a mit einem Radius, gleich t, die Linie mh in c oder c′, lege durch einen dieser Punkte mit ml eine Parallele cb oder c′ b′ und eine solche mit ef

durch c oder c'. Man erhält dadurch zwei Vierecke, abcd und ab'c'd', die beide die Forderung erfüllen.

Beweis. $\angle eaf = \alpha$, $\angle egi = \gamma$ und $\angle gea = \delta$ durch Construction.

Daher $\angle aig = 4R - (\alpha + \delta + \gamma) = \beta$.

Das Dreieck gik ist ein gleichschenkliches, und weil lm $\parallel$ gi und gl $\parallel$ ki, so ist auch das Dreieck glm gleichschenklich.

Es ist aber auch

$$gm \parallel nc \parallel n'c'$$
$$lm \parallel bc \parallel b'c'$$
und
$$gl \parallel bn \parallel b'n';$$

folglich ist mh der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenklichen Dreiecke, deren ungleiche Seite durch Parallelen mit ki auf den Linien gh und ha geschnitten wird: zugleich aber auch der Ort für die Ecken c, c' ... des gesuchten Vierecks, weil

$$ge = dn = d'n' = dc + bc = d'c' + b'c' = s.$$

Diese können aber nothwendig nur in den Punkten von mh liegen, welche von a den Abstand, gleich t, haben; also in c oder c', wo der Radius t die Linie mh schneidet, oder in dem Berührungspunkte, wenn mh Tangente wird.

Die Winkel des Vierecks ergeben sich gleich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus 12, 13.

218. Es sind gegeben: die Summe zweier Seiten (ad + cd), gleich s, die Winkel des Vierecks und noch der Winkel bda $= \varphi$, den die Diagonale mit einer Seite bildet; man soll das Dreieck construiren.

Fig. 270, b. Auflösung. Bilde den Winkel bae $= \alpha$, mache ae $=$ s, lege in einen beliebigen Punkt auf ae die Winkel f'd'a $= \delta$, und ad'b' $= \varphi$, und in den Durchschnitt b' den Winkel ab'g $= \beta$.

Dann mache d'e' $=$ d'c', ziehe c'e' und die Richtung ac', und schneide letztere durch ec $\parallel$ e'c'. Zieht man noch cd $\parallel$ c'd' und cb $\parallel$ c'b', so ist abcd das gesuchte Viereck.

Beweis. Dieser ist leicht, da abcd $\backsim$ ab'c'd' und ae' $=$ ad' + d'c' $=$ s' ist.

Fig. 271. 219. Aus der Differenz zweier anliegenden Seiten (cd — cb) $=$ u, der Diagonale ac $=$ t, welche zwischen jenen Seiten liegt, und den Winkeln das Viereck zu construiren.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel aef $= \delta$ und in einem beliebigen Punkte a auf dessen Schenkel einen zweiten Winkel bae $= \alpha$. In eg trage man die gegebene Differenz $=$ u, ziehe gh parallel ae und bilde in ige den

Winkel γ, wodurch der Winkel gia gleich β wird. Mache dann die Verlängerung von fg, nemlich gk, gleich gi, ziehe ki, gl ⪫ ki, lm ⪫ gi und durch den Durchschnitt m die Richtung hm. Schneidet man hc mit einem Radius gleich t aus a, zieht cb ⪫ ml und cd ⪫ ef: so ist das verlangte Viereck in abcd construirt.

Beweis. Leicht, da alme ähnlich abcd u. s. w. ist.

220. Ein Viereck zu zeichnen, wenn eine Seite, gleich m, die Differenz zwei anderer zusammenstoßender Seiten gleich d' und die Winkel gegeben sind.

Auflösung. In die Endpunkte von ab = m trage man die gegebenen Winkel α und β, in ae die Differenz d' und ziehe ef so, daß ein Winkel efh = γ mit der Verlängerung von cb entsteht. Verlängere nöthigenfalls auch da und mache eg gleich ef, ziehe gf und ec ⪫ gf, cd ⪫ ef: so hat man in abcd das verlangte Viereck. Fig. 272.

Beweis. Da das Dreieck efg gleichschenklich und cd ⪫ ef gemacht worden, so ist auch das Dreieck cde ein gleichschenkliches und

$$ad - ed = ad - cd = ae = d'$$

Daß das Viereck auch die gegebenen Winkel enthält, ist leicht nachzuweisen.

Anmerkung. Mehrere der vorstehenden und der am Schluß angegebenen Aufgaben über Vierecke lassen sich auf Aufgaben des vierten Abschnitts über Dreiecke zurückführen. Die erstern sind jedoch, ohne Beziehung auf ihre Uebereinstimmung mit denen über Dreiecke, in sich abgeschlossen behandelt und dem Leser die Vergleichung, als Uebung, überlassen worden. Auch lassen sich aus denen des vierten Abschnitts noch eine Menge Aufgaben für den fünften Abschnitt bilden.

Eben so sind die meisten Aufgaben über n ecke als Verbindung solcher über Dreiecke und Vierecke zu behandeln, wovon einige Beispiele folgen.

221. Es sind vier Seiten eines Fünfecks a', b', c', d', die beiden der fünften Seite anliegenden Winkel φ, ψ und der, der letzten Seite gegenliegende Winkel ω gegeben, man soll das Fünfeck construiren.

Auflösung. Man bilde zuerst aus den gegebenen Seiten b', c' und dem eingeschlossenen Winkel ω ein Dreieck BCD, um die Größe einer Diagonale bd = BD zu erhalten. Hierauf ziehe man eine Gerade ab = a', trage an selbige den Winkel bae = φ und in einen beliebigen Punkt k seines Schenkels den Winkel lka = ψ; mache kl gleich d', ziehe lm parallel ak und schneide lm aus b mit Fig. 273.

einem Radius, gleich BD, in d. Zieht man noch de parallel kl und construirt auf bd das, mit BCD congruente Dreieck bdc, so ist das Fünfeck abcde das verlangte.

Beweis. Leicht.

222. Es sind der alphabetischen Ordnung nach zwei Seiten b′ und e′, die Diagonale ec gleich t, die Winkel ψ, μ und ω, und noch die Summe der Seiten $c'+d'=s$ gegeben; man soll das Fünfeck bilden.

Fig. 274. Auflösung. Man zeichne einen Winkel aed $=\psi$, mache ae gleich e′ und ef gleich s; trage in f einen Winkel efg $=\frac{1}{2}\mu$ und schneide dessen Schenkel fg aus e mit einem Radius, gleich t, in c. In letzterm Punkte bilde man einen Winkel fcd, gleich $\frac{1}{2}\mu$, dessen Schenkel im Durchschnitt d auf ef eine Ecke der Figur bestimmen wird; lege noch in c einen Winkel dcb $=\omega$, mache bc gleich b′ und ziehe ab. Die verlangte Figur ist dann in abcde construirt.

Beweis. Leicht.

Sechster Abschnitt.

Aufgaben, Kreise und ihre Beziehungen betreffend, die sie unter sich und mit Geraden eingehen.

223. Den Umfang eines Kreises annähernd durch Construction einer Geraden zu finden.

Fig. 275. 1. Auflösung. Trage auf den Schenkel bc eines rechten Winkels den Radius cd fünfmal in a, m, p, q und b, theile mp und qb in drei gleiche Theile, trage dann dm in cf und fr in cg und ziehe go.

Setze hierauf bc von g nach h und ziehe durch h mit bc eine Parallele ki, so wird gi annähernd dem Umfang des Kreises, bis zur achten Decimalstelle genau, gleich sein.

Beweis. Verfolgt man den Gang der Construction, so hat man, den Radius gleich 1. gesetzt:

$$ca = am = mp = pq = qb = 1.$$
$$gh = cb = 5.$$
$$mn = no = op = qr = rs = sb = \tfrac{1}{3}.$$
$$cf = dm = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$
$$cg = fr = \sqrt{\frac{13^2}{3^2} + \sqrt{5}^2} = \sqrt{\frac{13^2 + 3^2 . 5}{3^2}}$$
$$= \tfrac{1}{3} \sqrt{13^2 + 3^2 . 5}$$

also go $= \sqrt{\frac{8^2}{3^2} + (\frac{1}{3}\sqrt{13^2 + 3^2 . 5})^2}$

$= \sqrt{\frac{8^2}{3^2} + \frac{1}{3^2}(13^2 + 3^2 . 5)}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{8^2 + 13^2 + 3^2 . 5}$

Nun ist go : gh = gb : gi

oder $gi = \frac{gh . gb}{go}$

es ist aber $gb = \sqrt{5^2 + (\frac{1}{3}\sqrt{13^2 + 3^2 . 5}}$

$= \sqrt{5^2 + \frac{1}{3^2}(13^2 + 3^2 . 5)}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{3^2 . 5^2 + 13^2 + 3^2 . 5}$

und $gh = 5$

folglich $ig = \frac{5 . \frac{1}{3}\sqrt{3^2 . 5^2 + 13^2 + 3^2 . 5}}{\frac{1}{3}\sqrt{8^2 + 13^2 + 3^2 . 5}} = \sqrt{\frac{439}{278}}$

und $\frac{1}{2} ig = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{439}{278}} = 3,141592639 \ldots\ldots$

Dagegen ist $\pi = 3,141592653 \ldots.$
also ist die Differenz $= 0,000000014 \ldots.$
um welche $\frac{1}{2}$ ig kleiner ist.

2. Auflösung. Man verlängere den Radius fg und ziehe in f eine Tangente, trage auf letztere den Durchmesser in fd, dann von d aus nach a, b, c dreimal $\frac{1}{5}$ des Radius, mache fh gleich ag und ziehe mit cg die Parallele he: so wird fe annähernd, und zwar bis zur siebenten Decimale genau, dem Umfang des Kreises, und das Dreieck fge dessen Inhalte nahe genug, gleich sein. Fig. 276.

Beweis. In Folge der Construction ist, wenn man den Radius = 1 setzt,

$$fh = fa = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$fc = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$

Nun hat man $ga_q = fg_q + fa_q = 1 + \frac{11^2}{5^2}$

und $ga = \frac{\sqrt{146}}{5} = fh.$

Ferner ist

$$fg : fc = fh : fe$$

oder
$$1 : \frac{13}{5} = \frac{\sqrt{146}}{5} : fe$$

also $fe = \frac{13}{5} \cdot \frac{\sqrt{146}}{5} = \frac{13\sqrt{146}}{25} = 6,2831843 \ldots.$

und $\frac{1}{2} \cdot 6,2831843 \ldots = 3,1415921 \ldots\ldots$

Vergleicht man damit $\pi = 3,14159265 \ldots$

so ist die Differenz $= 0,0000005 \ldots$,

um welche $\frac{1}{2}$ fe zu klein ist.

Fig. 277. 3. Auflösung. Man theile den Radius op in acht gleiche Theile, ziehe die Tangente oq, mache sie gleich $\frac{7}{8}$ op und verbinde p, q. In ps trage man $\frac{1}{2}$ op, fälle die Normale rs und ziehe qr, mit dieser aber st parallel.

Es ist dann $pb = 3op + pt$, gleich der halben Peripherie.

Beweis. $pq : ps = op : pr$

und $pq : ps = pr : pt$

also $op : pr = pr : pt$

oder $pr_q = op \cdot pt$

und da auch $pq_q : ps_q = op_q : pr_q = op_q : op \cdot pt = op : pt$

so ist
$$pt = \frac{op \cdot ps_q}{pq_q}.$$

Es ist aber $pq_q = op_q + oq_q$

d. i.
$$pq_q = op_q + (\tfrac{7}{8}\, op)_q = \left(1 + \frac{7^2}{8^2}\right) op_q$$
$$= \frac{8^2 + 7^2}{8^2} \cdot op_q$$

und
$$ps_q = (\tfrac{1}{2}\, op)_q = \frac{4^2}{8^2} \cdot op_q$$

daher
$$pt = \left(op \cdot \frac{4^2}{9^2} \cdot op_q\right) : \left(\frac{7^2 + 8^2}{8^2} \cdot op_q\right)$$
$$= \frac{4^2}{7^2 + 8^2} \cdot op = \frac{16}{113} \cdot op;$$

folglich
$$3 \cdot op + pt = op\left(3 + \frac{16}{113}\right) = \frac{355}{113} \cdot op;$$

und setzt man $op = r = 1$

und $3\, op + pt = pb$

so ist Rad. : pb = 2 . pb = 113 : 355,

welches mit dem Verhältniß des Metius übereinstimmt.

Anmerkung. Es giebt viel Bearbeitungen des vorliegenden Problems. Die Auflösungen nähern sich bald

mehr bald weniger dem Verhältniß 1 : π; sind mehr oder minder verwickelt und beurkunden alle, daß die wahre Aufwickelung eines Kreises noch nicht gefunden sei. Dagegen befriedigt das bekannte Verhältniß $\frac{1}{\pi}$ auch die anspruchsvollste Genauigkeit in analytischer Beziehung. Für den Practiker sind dergleichen Constructionen zu umständlich; sie sind aber gute Uebungsaufgaben. Jedoch kann die Aufgabe nicht als Vorlage zur Erfindung der Construction benutzt werden, wohl aber zu Bildung des Beweises, und so betrachtet, mögen noch einige solche Constructionen hier folgen.

4. Auflösung. Man errichte den normalen Radius cd und die Tangenten ag, be, mache ag gleich 3. Radien und trage auch einen, als Sehne, von d nach i; ziehe dann die Secante ci bis e und noch eg; so ist ge gleich der halben Peripherie, bis zur fünften Decimale genau, und die Differenz von π, 0, 00006 . . . Fig. 278.

5. Auflösung. Man ziehe die normalen Durchmesser ab und dm, halbire den Radius cd in l und ziehe die Richtung bl bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in e. Durch e ziehe man die Secante eh normal ab, mache gh gleich ge, halbire cf in i und schneide aus i mit einem Radius, gleich ef, die Secante eh in k. Fig. 279.

Die Länge kh ist annähernd gleich der halben Peripherie und die Differenz von π, 0, 000027 . . . .

6. Auflösung. Man trage den Durchmesser dreimal von a nach d und vermehre dieses Vielfache um bd = $\frac{1}{5}$ der Sehne des Viertelkreises, gh. Die Gerade ab ist annähernd der Peripherie gleich und die Differenz von π, 0, 0001. Fig. 280.

Anmerkung. Die Einfachheit dieser Construction macht sie zu praktischen Zwecken brauchbarer, als alle vorhergehenden.

224. Den Mittelpunkt zu einer gegebenen Kreislinie zu finden.

1. Auflösung. Eine jede Normale, durch die Mitte einer Sehne gelegt, geht durch den Mittelpunkt. Daher werden sich zwei solche Normalen immer in dem Mittelpunkte schneiden und ihn auf diese Weise bestimmen. Fig. 281.

2. Auflösung. Und halbirt man einen, auf einer beliebigen Sehne normalen Durchmesser, so geschieht dieses im Mittelpunkt des Kreises. Fig. 282.

3. Auflösung. Diesen Durchmesser findet man auch, nach 89, wenn man einen Peripheriewinkel = R in den Kreis legt, und die Durchschnittspunkte n, l verbindet. Fig. 283.

225. Zu einem Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden.

Auflösung. Man nehme auf dem Bogen drei oder vier Punkte, als Endpunkte zweier Sehnen, an und verfahre dann nach Anleitung der vorigen Aufgabe.

226. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Radius, gleich r, hat und zwei gegebene Punkte a und b aufnimmt.

Fig. 284. Auflösung. Beschreibe aus jedem dieser Punkte mit einem Radius gleich r einen Bogen. Die Durchschnitte c und f dieser Bogen sind Mittelpunkte zweier Kreise, welche beide der Forderung entsprechen.

Beweis. Aus 76; 114.

227. Einen Kreis zu beschreiben, der drei in seiner Ebene gegebenen Punkte a, b, c aufnimmt.

Fig. 285. Auflösung. Man denke die Punkte durch Sehnen verbunden und in einer Kreislinie liegend, so hat man die Aufgabe 224, 1. zu lösen.

2. Auflösung. Man denke die gegebenen Punkte a, b, c zu einem Dreieck verbunden. Errichte ce normal bc und ae normal ab, ziehe aus dem Durchschnitt e eine Gerade nach dem gegenliegenden Punkte b, so ist diese Durchmesser des Kreises und deren Mitte m der Mittelpunkt. Fig. 286.

Beweis. Aus 89.

Anmerkung. Diese Auflösung ist praktisch bequem, wenn sich der Durchschnitt e vollkommen bestimmt ergiebt.

228. Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser, gleich r, zu beschreiben, dessen Peripherie von einem gegebenen Punkte c eine radiale Entfernung, gleich b, und von c′ eine Entfernung, gleich a, hat.

Fig. 287. Auflösung. Man beschreibe aus c einen Bogen mit einem Radius, gleich r + b, uud schneide ihn aus c′ mit einem Radius, gleich r + a. Der Durchschnitt c″ ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Aus 114, 115.

229. Es ist ein Kreis afgb und innerhalb ein Punkt d gegeben; man soll eine Sehne ag so ziehen, daß eine in Fig. 288. d auf dem Durchmesser ab errichtete Normale ein Stück der Sehne, eg = m, abschneide.

Auflösung. Beschreibe über bd einen Halbkreis, ziehe aus a eine Tangente ah, trage auf seinen Halbmesser hl eine Länge hi = $\frac{1}{2}$ m und ziehe ai. Aus i beschreibe den Bogen hk, und aus a den ke; so bestimmt dessen Durchschnitt mit df die Richtung ae der verlangten Sehne.

Beweis. Halbirt man eg in n, so ist

$$ih = ik = en = \tfrac{1}{2} m$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{Nun ist} & ai_q & = & ab_q + hi_q \\
\text{oder} & ai_q & = & ab_q + en_q \\
\text{und weil} & ab_q & = & .\ (ak + 2\,ki) \\
 & & = & ae\ .\ (ae + 2\,en) \\
 & & = & ae\ .\ ag \\
\text{so ist} & ai_q & = & ae\ .\ ag + en_q = an_q \\
\text{Es ist aber auch} & ai_q & = & ab_q + hi_q \\
\text{und} & ab_q & = & ab\ .\ ad; \\
\text{daher} & ai_q & = & ab\ .\ ad + hi_q \\
\text{oder} & ai_q & = & ab\ .\ ad + en_q \\
\text{also} & ae\ .\ ag & = & ab\ .\ ad, \\
\text{woraus folgt} & ab : ag & = & ae : ad.
\end{array}
$$

Mithin sind die Dreiecke ade und abg ähnlich, die Winkel agb und ade gleich und beides rechte. Es liegt also der Punkt g in der Kreislinie und ist Endpunkt der Sehne ag, auf welcher $2 \, . \, en = 2 \, . \, ih = m$.

230. Einen Kreis mit gegebenem Radius, gleich r, so zu beschreiben, daß seine Peripherie von dem Punkte c'' eine Entfernung gleich m hat, und eine, der Lage und Größe nach gegebene Linie gf als Sehne aufnimmt.

Auflösung. Aus c'' ziehe mit einem Radius gleich $m + r$ einen Bogen mn. In der Mitte o von fg errichte eine Normale de, so ist deren Durchschnitt c mit dem Bogen mn der Mittelpunkt des verlangten Kreises. Fig. 289.

Beweis. Der Bogen mn ist geometrischer Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die mit dem Kreise c'' die Centrale gleich $r + m$ haben, und deren Berührungspunkt auf jeder dieser Centralen von c'' um m abliegt. Zugleich ist aber auch die Normale auf Mitten der Sehne gf der Ort für jene Mittelpunkte, daher c derjenige, welcher beide Forderungen erfüllt.

Anmerkung. Der Durchschnitt des Bogens mn aus f mit einem Radius, gleich r, würde ebenfalls den Mittelpunkt c bestimmt haben.

Die Aufgabe ist übrigens in jedem Falle unmöglich, wo $m \gtrless cc'' - r$ gegeben ist.

231. Innerhalb oder außerhalb einer Kreisebene ist der Punkt e gegeben, man soll durch ihn eine Richtung legen, deren als Sehne abgeschnittenes Stück gleich u sei.

Auflösung. Man trage eine Sehne, gleich u, beliebig in den Kreis; diese sei mn. Fälle auf diese aus dem Mittelpunkte einer Normale dg und beschreibe mit letzterer einen concentrischen Kreis; verbinde den gegebenen Punkt e mit dem Mittelpunkte d, beschreibe über ed einen Halbkreis Fig. 290, a, b.

und ziehe eine Richtung durch e und den Durchschnittspunkt c der Kreise, bis sie den äußern Kreis in b und a trifft. Diese Linie ab ist die verlangte Sehne.

Beweis. Nach 84. müssen alle Sehnen desselben Kreises, die gleich u sind, wie mn, ab . . ., den Abstand dg vom Mittelpunkte haben. Sie werden daher alle Tangenten eines Kreises sein, welcher mit dem Radius dg beschrieben wird.

Nun ist durch den Halbkreis auf ed ein rechter Winkel ecd gebildet worden, dessen Schenkel cd Radius des gedachten Kreises ist, dessen anderer Schenkel aber durch den Endpunkt des Radius und durch den gegebenen Punkt geht. Daher ist ab eine solche Tangente und gleich u.

Anmerkung. Außer ab ist noch eine Sehne durch e möglich, welche gleich u ist. Ihr Berührungspunkt, als Tangente des innern Kreises, liegt in c′, wo ec′ = ec ist. Das Maximum von u kann die Größe des Durchmessers vom gegebenen Kreise nicht überschreiten. Ist u gleich dem Durchmesser, so ist die gesuchte Sehne der Durchmesser durch e selbst.

Das Minimum von u ist für Fig. 290, a in derjenigen Sehne gegeben, die mit einem Radius durch e in e rechte Winkel bildet.

232. Es ist ein Kreis und in ihm eine Sehne ab gegeben; man soll eine andere Sehne ziehen, die parallel ab und gleich n ist.

1. Auflösung. Man trage auf die verlängerte Sehne ab die gegebene n in af, bilde über dieser ein gleichschenkliches Dreieck ahf, dessen gleiche Seiten Radien des Kreises
Fig. 291. sind, und ziehe durch den Mittelpunkt m die Linien mt und mk parallel fh und af. Die Verbindungslinie der Durchschnitte t, k ist die gesuchte Sehne.

Beweis. Das Dreieck mtk ist congruent dem Dreieck afh, folglich tk = af = n.

Nun ist ap ∦ ot, also ∟pat = ato;
und, wegen Congruenz der Dreiecke, ∟kto = fap;
daher ∟kto + ota = fap + pat
d. i. ∟atk = fat.

Nach 13. ist folglich kt parallel ab.

2. Auflösung. Trage aus der Mitte der gegebenen Sehne ab nach beiden Seiten die Hälfte der gegebenen q
Fig. 292. nach m und u, errichte in diesen Punkten Normalen ut, mn: so schneiden diese auf der Peripherie in s und o die Endpunkte der gesuchten Sehne.

Beweis. Aus 84, 15 a, 20.

233. Aus einem Punkte a einer Kreislinie eine Sehne so zu ziehen, daß deren zugehöriger Mittelpunktswinkel einem gegebenen Winkel 2 α gleich sei.

Auflösung. Man ziehe einen Radius nach a und, nach Aufgabe 248, eine Tangente in a; trage an diese einen Winkel gab, gleich α, so ist der Winkel bca gleich 2 α. Fig. 293.

Beweis. Aus 90 und 88.

234. Aus einem Punkte a einer Kreislinie eine Sehne zu ziehen, deren zugehörige Peripheriewinkel gleich α sind.

Auflösung. Verbinde den gegebenen Punkt a mit dem Mittelpunkte c und ziehe in a eine Tangente; trage an diese einen Winkel gab = α, so ist das durch die Peripherie abgeschnittene Stück des Schenkels die verlangte Sehne, und jeder Peripheriewinkel, wie bda, gleich α. Fig. 293

Beweis. Aus 90, 80.

235. Es ist innerhalb eines Kreises ein Punkt f gegeben, man soll durch diesen eine Sehne ziehen, die einem gegebenen Peripheriewinkel, gleich α, zugehört.

Auflösung. In einen beliebigen Punkt der Peripherie lege man einen Winkel nom = α; errichte in der Mitte der zugehörigen Sehne nm die Normale pc und ziehe einen concentrischen Kreis vom Radius pc; verbinde dann den gegebenen Punkt f mit dem Mittelpunkte c und suche, nach Aufgabe 248, zu dem innern Kreise eine Tangente in f, so ist das Stück eg dieser Tangente die verlangte Sehne; und jeder Peripheriewinkel, wie ehg, ist gleich α. Fig. 294.

Beweis. Aus 84, 80.

236. Ueber einer gegebenen Linie mk einen Kreisabschnitt zu bilden, in welchem jeder Peripheriewinkel, wie mlk, einem gegebenen Winkel α gleich ist.

Auflösung. Lege an mk einen Winkel kmh = α, errichte in m eine Normale mn auf mh, halbire mk in o, ziehe on normal, so ist der Durchschnitt n der Mittelpunkt des Kreises vom Radius nm, welcher die Forderungen erfüllt. Fig. 295.

Beweis. Aus 90, 78, 83.

237. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne so zu ziehen, daß die Differenz ihrer beiden Segmente einer gegebenen Linie d gleich sei.

Auflösung. Man verbinde den gegebenen Punkt p mit dem Mittelpunkt c, beschreibe über pc einen Halbkreis nnd trage aus p die halbe gegebene Differenz als Sehne auch o. Fig. 296.

Zieht man die Richtung op, bis sie zu beiden Seiten die Peripherie trifft, so ist pn — pm = d.

Beweis. Es ist $mp + op = mo$

oder $mp + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} mn$, nach 82.

Desgleichen ist $pn - op = no$

oder $pn - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} mn$

also $mp + \frac{1}{2}d = pn - \frac{1}{2}d$

und $d = pn - mp$

238. Durch einen gegebenen Punkt p außerhalb eines Kreises zwei Secanten so zu ziehen, daß die Summe der beiden zwischen ihnen liegenden Bogen der Summe zweier andern Bogen $ac + bd$ gleich werde.

Fig. 297. Auflösung. Man ziehe die Sehnen ab und cd, trage nach Aufgabe 231 jede dieser Sehnen so in den Kreis, daß ihre Richtung durch p geht, so sind pq und po die verlangten Secanten.

Beweis. Da nach 79,

der Bogen $ab = qm$,

d. i. $am + nm + bn = cq + ac + am$

oder $nm + bn = cq + ac$, I;

und auch der Bogen $no = cd$

d. i. $bn + bd + do = do + oq + cq$

oder $bn + bd = oq + cq$, II.

so ist, wenn man I — II nimmt,

$nm - bd = ac - oq$

oder $nm + oq = ac + bd$.

239. Auf der Peripherie eines Kreises sind zwei Punkte a und b gegeben; man soll einen Durchmesser so

Fig. 298. legen, daß der Abstand der, auf diesen Durchmesser projicirten Punkte gleich m sei.

Auflösung. Nach Aufgabe 58, indem der Mittelpunkt des Kreises als der dritte gegebene Punkt betrachtet wird.

Beweis. Wie Aufgabe 58.

240. Durch einen, innerhalb einer Kreisebene bestimmten Punkt f eine Sehne so zu ziehen, daß die beiden Stücke, die dieser Punkt scheidet, sich verhalten wie $m : n$,

Fig. 299, a, b. z. B. wie 2 : 3.

Auflösung. Man lege durch f einen Durchmesser ab, nehme auf diesem einen Punkt e so an, daß

$$bf : fe = m : n = 2 : 3$$

wird, suche zu fe und fa die mittlere Proportionale nemlich Fig. 299, b.

$$\left\{ \begin{matrix} mn \\ fe \end{matrix} : no = no : \begin{matrix} hn \\ fa \end{matrix} \right\}$$

schneide aus f mit einem Radius, gleich no, die Kreislinie in d und ziehe cd durch f. Diese ist die gesuchte Sehne.

Beweis. Nach der Construction ist

$$bf : fe = 2 : 3$$

und $fe : fd = fd : af$

aber auch $bf : cf = fd : af$, nach 92.

daher $bf : cf = fe : fd$

oder $bf : fe = cf : fd = 2 : 3$.

241. Es ist ein Kreis und in ihm eine Sehne ab gegeben; man soll einen Punkt d finden, so daß, wenn aus ihm die Sehnen ad und bd gezogen werden, die Verbindungslinie fe, der Projectionen von b und a, mit der Normale dg einen Winkel fid = φ bildet.

Auflösung. Da alle Peripheriewinkel auf dem Bogen acb gleich sind, so ist in jedem der Winkel adb gegeben. Fig. 300.
Man mache nun den Winkel abd $= \frac{1}{2}(R - \llcorner adb + \varphi)$ oder auch den Winkel bad $= \frac{1}{2}\big(3R - (adb + \varphi)\big)$, so schneidet dessen Schenkel den Punkt d auf der Peripherie ab.

Beweis. Da die Winkel dfh und deh rechte sind, so liegen, nach 105, die Punkte d, e, h, f in der Peripherie eines Kreises, und man hat nach 93.

$$ad . af = ah . ae$$

oder $ad : ah = ae : af$

und auch $bf . bh = bd . be$

oder $bf : bd = bh : be$.

Daher ist $\triangle$ aed $\backsim$ afh, und $\triangle$ bdf $\backsim$ bhe, und es ist

$$bd : df = bh : he$$

und $ad : de = ah : hf$.

Nach 74, a hat man ferner

$$bh . hf = ah . he$$

oder $bh : he = ah : hf$;

also ist auch $bd : df = ad : de$,

und das Dreieck abd ähnlich dem Dreieck efd.

Daraus folgt $\llcorner abd = dfi$, und $\llcorner dab = dei$.

Da nun $\llcorner fdi = R - bad$

und $\llcorner ide = R - abd$,

so ist $\llcorner die = 2R - ide - dei$

$$= 2R - R + abd - dab$$

$$= 2R - R + \tfrac{1}{2}(R - adb + \varphi) - \tfrac{1}{2}\big(3R - (adb + \varphi)\big) = \varphi.$$

242. In der Peripherie eines Kreises sind zwei Punkte a und c gegeben; man soll einen dritten d suchen, so daß die Sehnen zwischen diesen Punkten sich verhalten wie m : n.

Auflösung. Man verbinde die gegebenen Punkte durch eine Gerade, bilde mit dieser einen beliebigen Winkel bca, trage m in cg und n in bg, ziehe ba und damit parallel eg. Halbire dann den Bogen afc in f, ziehe die Fig. 301.

Richtung ce, bis sie den Kreis wider in d schneidet: so ist d der verlangte Punkt und ad, dc sind die Sehnen, die der Forderung m : n entsprechen.

Beweis. Nach 57 ist

$$cg : bg = ce : ea = m : n;$$

nach 80 und 58, sind die Dreiecke afe und dce ähnlich, daher $af : ae = cd : de$

und, weil auch die Dreiecke cfe und dae ähnlich sind,

$$cf : ce = ad : de.$$

Es ist aber $af = cf$,

folglich $ae : ce = ad : cd = m : n.$

Anmerkung. Es lassen sich überhaupt vier verschiedene Punkte auf der Peripherie finden, welche alle der Aufgabe Genüge leisten.

243. In einen gegebenen Kreis zwei Linien als Sehnen einzutragen, welche zwei gegebenen Linien a und b gleich sind, und einen Winkel, gleich α, bilden.

Fig. 302.

1. Auflösung. Man trage in den Kreis eine Sehne $qm' = a$ beliebig, und in m einen Winkel $n'm'q = \alpha$, mache m′ n′ gleich b und bilde über dieser Linie mit dem Radius des Kreises ein gleichschenkliches Dreieck m′n′o.

Hierauf ziehe man durch den Mittelpunkt des Kreises on parallel o′n′ und om parallel o′m′, verbinde m, n; so bilden die Sehnen m′q und mn in nrq den gegebenen Winkel α und sind den Linien a und b gleich.

Beweis. Aus 79, 12.

Fig. 303. 2. Auflösung. Man trage zwei Sehnen $ab = a$ und $hi = b$ beliebig in den Kreis und in abg einen Winkel $= \alpha$; fälle aus dem Mittelpunkt des Kreises Normalen auf hi und bg, verlängere letztere und mache cm gleich cd.

Zieht man noch ef parallel bg durch m, so sind ab und ef die verlangten Sehnen und der Winkel eka ist gleich α.

Beweis. Aus 84, 12.

244. Es ist ein Kreis und eine Gerade ab gegeben; man soll auf der Peripherie einen Punkt (k) finden, so daß, wenn man durch ihn und die Endpunkte von ab zwei Richtungen legt, die dadurch bestimmte Sehne (cf) parallel ab werde.

Fig. 304, a, b. 1. Auflösung. Man suche nach Aufgabe 249 die Tangente im Berührungspunkte d, welche durch b geht, verlängere ba und mache bi gleich der dritten Proportionale zu ba und bd, so daß, nach Fig. 340, b., $ba : bd : bi = n : q : m$ werde.

Dann construire man die Tangente if aus i, verbinde den Berührungspunkt F mit b und ziehe die Richtung ak: so ist fc die gesuchte Sehne und k der verlangte Punkt.

Beweis. $bd_q = bf \cdot bk$, nach 94.
oder $bf : bd = bd : bk$.
Auch ist $ba : bd = bd : bi$, durch Constr.
daher $bf : bi = ba : bk$
also ist das Dreieck bfi ähnlich dem Dreieck bak
und $\angle bak = bfi$.
Ferner ist $\angle bfi = fck$, nach 90,
und auch gleich $\angle bak$;
$\angle bka = ckf$
daher sind auch die Dreiecke cfk und abk ähnlich,
$\angle cfk = abk$
und $\angle fck = bak$;
folglich ist, nach 13, cf parallel ab.

2. Auflösung. Ist bc die gegebene Gerade und m der gegebene Kreis: so ziehe man eine Richtung cm durch den Mittelpunkt bis zur Peripherie, lege durch die beiden Fig. 305.
Durchschnittspunkte p, r und den Endpunkt b einen zweiten Kreis und construire auch dem Durchschnittspunkte h eine Tangente an den Kreis m. Zieht man durch den Berührungspunkt g und den Endpunkt c eine Richtung, bis sie den Kreis in d schneidet und dann bd: so ist fg die parallele Sehne und d der gesuchte Punkt.

Beweis. Nach 93, hat man
$cp \cdot cr = cg \cdot cd$
oder $cp : cg = cd : cr$
desgleichen $cp : cr = ch \cdot cb$
oder $cp : ch = cb : cr$
also auch $cg : ch = cb : cd$.
Hieraus folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke hcg und bcd und die Gleichheit der Winkel chg und cdb.

Es ist aber, nach 90, $\angle hgf = cdb$
also auch $\angle chg = fgh$
folglich ist, nach 13, fg parallel bc.

Anmerkung. Ist bc kleiner als der Abstand des Mittelpunktes m von bc, so erhält man den Punkt h, auf der Verlängerung von bc, bei x. Dieser Punkt giebt aber dasselbe Resultat wie h.

245. Es ist ein Kreis und in ihm ein eingeschriebenes Dreieck abc gegeben; man soll auf der Peripherie einen Punkt (p) finden, so daß, wenn man aus diesen Normalen auf die Seiten des Dreiecks oder auf ihre Verlänge-

zieht, die Gerade, welche die Fußpunkte e, g, d verbindet, parallel mit einer gegebenen hn sei.

Auflösung. Man fälle aus einer Spitze c des gegebenen Dreiecks eine Normale cm auf hm, den Winkel bcm, welchen letztere und die Dreiecksseite bc bildet, trage man in dcp : so schneidet dessen Schenkel den Kreis in dem gesuchten Punkte p, und die Fußpunkte der Normalen pe, pg und pd haben gleichen Abstand von hn.

Beweis. Das Viereck pecd ist den Ecken nach centrisch, weil die beiden gegenliegenden Winkel cep und cdp rechte sind; daher ist ∟ced = cpd, nach 80.
und da ∟ecf = pcd
so ist in den Dreiecken ecf und pcd
auch ∟efc = pdc = R,
also ed normal cm
und weil, durch Constr., hn normal om ist, so muß ed parallel hn sein.

246. Es ist ein Kreis zu construiren, dessen Radius gleich r gegeben ist, so daß derselbe auf den beiden Geraden ab und ef Stücke als Sehnen abschneidet, die zwei gegebenen Linien m und n gleich sind.

Fig. 307. Auflösung. Man trage auf die eine Gerade ef die Länge n in op, auf die andere m in uw beliebig; bilde über op und uw gleichschenkliche Dreiecke mit dem Radius des Kreises = r und ziehe durch deren Spitzen q und v Parallelen mit ab und ef.

Der Durchschnitt c dieser Parallelen ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und die Abschnitte hg und kl sind die entsprechenden Sehnen.

Beweis. Für po = n ist q der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius r, worin po Sehne ist; dasselbe ist der Punkt v für uw = m. Nach 84, sind die Parallelen qr und st die Orte der Mittelpunkte jener beiden Kreise, welche auf ab und ef immer Sehnen, gleich m und n, abschneiden. Daher muß der Durchschnittspunkt c dieser Parallelen für ab und ef zugleich jene Eigenschaft haben, weil dann die beziehlichen beiden Kreise zusammen fallen.

247. Durch einen der Durchschnittspunkte e zweier Kreise f und g eine Gerade so zu ziehen, daß das durch beide Peripherien abgeschnittene Stück cd gleich einer gegebenen Linie ab sei.

Auflösung. Beschreibe über der Centrale fg einen Halbkreis; trage von g nach h die Hälfte von ab als Sehne
Fig. 308. ein und ziehe cd parallel hg : so ist cd gleich ab.

Beweis. Fällt man aus den Mittelpunkten der Kreise Normalen, so geht die Normale fn durch h und ist mn = hg = $\frac{1}{2}$ ab. Nach 82. ist aber dn = ne und em = mc; folglich cd = 2 mn = ab.

248. In einen gegebenen Punkt o einer Kreislinie eine Tangente zu legen.

Auflösung. Von dem gegebenen Punkt o ziehe einen Radius und errichte auf diesen in o eine Normale, so ist letztere Tangente in diesem Punkte. Fig. 309.

Beweis. Aus 77.

249. Von einem Punkte b außerhalb eines Kreises eine Tangente an diesen zu ziehen.

Auflösung. Verbinde den gegebenen Punkt b mit dem Mittelpunkt des Kreises, beschreibe mit dieser Verbindungslinie bc, als Durchmesser, einen Kreis, so schneidet dieser den gegebenen in den Punkten d und d′, welche beide Berührungspunkte von Tangenten aus dem Punkte b sind. Fig. 310

Beweis Aus 89, 78.

250. Aus einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt m eine Tangente zu ziehen, ohne den Mittelpunkt des Kreises zu benutzen. Fig. 311.

Auflösung. Man ziehe aus m eine beliebige Secante mk, beschreibe über ihr einen Halbkreis und errichte in ihrem Durchschnittspunkte h eine Normale hd.

Mit dem Radius md beschreibe aus m einen Bogen, der den Kreis in i und c schneiden und in diesen Durchschnitten zwei Berührungspunkte von Tangenten bestimmen wird, die beide durch m gehen.

Beweis. Zieht man md, so ist, nach 89, der Winkel mdk = R; und, nach 62,

$$mh : md = md : mk$$

da aber $mi = mc = md$,
so ist auch $mh : mi = mi : mk$
und $mh : mc = mc : mk$.

Hieraus folgt, nach 94, daß mc und mi Tangenten des Kreises sind.

251. Es ist ein Kreis und in ihm eine Sehne cd gegeben; man soll eine Tangente parallel mit cd ziehen.

Auflösung. Errichtet man in der Mitte der gegebenen Sehne eine Normale, so geht diese durch den Mittelpunkt des Kreises, ist also Durchmesser; und jede Normale, in den Endpunkten desselben errichtet, ist Tangente, und parallel cd. Fig. 312.

Beweis. Leicht.

252. Eine Tangente an einen Kreis zu ziehen, die parallel einer außerhalb gelegenen Richtung mn ist.

1. Auflösung. Ist der Mittelpunkt des Kreises bekannt, so fälle man aus ihm eine Normale auf mn. Die
Fig. 313. Durchschnittspunkte dieser Normale mit der Kreislinie sind die Berührungspunkte für Tangenten vu und v'u', welche man parallel mn zu ziehen hat.

2. Auflösung. Kann der Mittelpunkt nicht benutzt werden, so ziehe man eine beliebige Sehne ab parallel mn, errichte in deren Mitte eine Normale u. s. w.

Beweis. Leicht.

253. An einen Kreis eine Tangente zu legen, die mit einer gegebenen Richtung einen Winkel, gleich α, bildet.

Fig. 314. Auflösung. Man trage den Winkel α an ab, so daß dessen Schenkel br Secante des Kreises wird; errichte in der Mitte des Stücks dieser Secante, welches Sehne des Kreises ist, eine Normale und ziehe durch einen der Durchschnittspunkte o oder p eine Parallele mit br.

Beweis. Leicht.

254. An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu legen, die einen Winkel gleich φ bilden.

Fig. 315. 1. Auflösung. Man zeichne einen Mittelpunktswinkel mcn, welcher gleich dem Supplement von φ ist, und ziehe durch die Durchschnittspunkte des Kreises m und n Normalen.

Beweis. Aus 78, 34.

2. Auflösung. Ziehe einen Durchmesser bd, bilde in b die Winkel abd = dbe = $\frac{1}{2}\alpha$, ziehe durch die Mitten der entstandenen Sehnen die Radien cm und cn und $mo \parallel ab$, $no \parallel be$.

Beweis. Leicht.

Fig. 316. 3. Auflösung. Ziehe eine beliebige Secante bm, trage in c den Winkel mon = φ und halbire das Supplement ncb durch ca; so sind a und b die Berührungspunkte, aus denen sich die gesuchten Tangenten, mittelst der Radien ao und bo, leicht ziehen lassen.

Beweis. Nach der Construction ist

$$\angle mon = \varphi$$

$$\angle noa = acb = \tfrac{1}{2}(2R - \varphi) = R - \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Nach 90 ist $\angle bad = abd = R - \frac{1}{2}\varphi$

folglich $\angle adb = \varphi$.

255. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt d geht und eine der Lage nach gegebene
Fig. 317. Gerade in dem Punkte o berührt.

Auflösung. Errichte in o eine Normale op, verbinde auch o mit d, halbire od durch die Normale qr: so giebt der Durchschnittspunkt c den Mittelpunkt des gesuchten Kreises vom Radius co, der durch d geht und mn in o berührt.

Beweis. Aus 78, 83.

256. Auf der Tangente op eines Kreises soll ein Punkt (k) so bestimmt werden, daß das Stück ks der Secante km nach dem Endpunkt des Durchmessers pm einer gegebenen Linie h gleich werde.

Auflösung. Man trage $\frac{1}{2}$h in pr und beschreibe aus r mit diesem Radius einen Kreis. Ziehe die Richtung mr bis q, und aus m mit dem Radius mq einen Bogen qk: so ist k der gesuchte Punkt und ks = h. Fig. 318.

Beweis. Da op Tangente ist, so hat man nach 94.

$$kp_q = mk \,.\, sk$$

und, weil mn Tangente des Kreises r ist,

$$mp_q = pm \,.\, tm$$

daher $kp_q + mp_q = mk \,.\, sk + qm \,.\, tm$,

und nach 47. $= mk_q$;

es ist also $mk_q - mk \,.\, sk = qm \,.\, tm$

und auch $= mk \,.\, ms$.

Nun ist aber qm = mk, folglich auch ms = tm und daher ks = tq; und da tq = pu = h, so folgt ks = h.

257. Eine Tangente an zwei gegebene Kreise zu legen; und zwar

a) wenn die Kreise gleiche Radien haben;
b) wenn die Tangente, bei ungleichen Kreisen, die Verlängerung der Centrale und
c) wenn sie die Centrale selbst schneiden soll.

1. Fall, Auflösung. Man errichte auf der Centrale aus einem der Mittelpunkte einen normalen Radius und ziehe durch dessen Endpunkt eine Parallele mit der Centrale.

2. Fall, Auflösung. Man beschreibe über der Centrale cd einen Halbkreis, trage von c nach f die Differenz ac — bd der beiden Radien als Sehne ein, ziehe df und die Richtung cf nach o, pq parallel df durch o: oder dr parallel co und durch die beiden Punkte o, r, als Berührungspunkte, die Tangente. Fig. 319.

Beweis. Die Radien co, dr sind, nach 89 und 16, normal df, also auch normal pq; und da pq durch die Endpunkte der Halbmesser beider Kreise geht, so ist sie, nach 78, Tangente derselben.

3. Fall, Auflösung. Trage in den, auf der Centrale beschriebenen, Halbkreis, die Summe ac + bd der

Radien als Sehne in ce, und ziehe dg parallel ce. Die Berührungspunkte sind dadurch in h und g bestimmt worden, so daß die Richtuug gh innere Tangente beider Kreise ist.

Beweis. Da ce = ch + dg = ch + eh, so ist dg = eh und mn parallel de. Zugleich sind aber ch und dg normal ed, folglich auch normale Radien auf mn, und letztere Tangente beider Kreise.

Anmerkung. Es lassen sich immer vier Tangenten an diese Kreise ziehen. Zwei auf den entgegengesetzten Seiten der Centrale, wie pq; die andern beiden wie mn, sich auf der Centrale schneidend, während die erstern sich auf deren Verlängerung über den kleinern Kreis hinaus schneiden.

Diese Durchschnittspunkte sind die Aehnlichkeitspunkte, und die Tangenten selbst Aehnlichkeitslinien der Kreise. Berühren sich die Kreise von außen, so ist ihr Berührungspunkt auch der der gemeinschaftlichen Tangente und ihr innerer Aehnlichkeitspunkt. Die Tangente ist dann eine Normale aus diesem Punkte auf der Centrale.

258. Einen Kreis, vom Radius ei, so zu beschreiben, daß er zwei ihrer Lage nach gegebene, nicht parallele, Gerade berührt.

Fig. 320. Auflösung. Da der Abstand des zu bestimmenden Mittelpunktes e von jeder der gegebenen Geraden gleich dem Radius sein muß, so ist dessen geometrischer Ort, in Bezug auf jede einzelne Gerade, eine Parallele vom Abstand gleich ei. Also liegt, in Beziehung auf beide zugleich, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises in dem Durchschnitt e dieser Parallelen.

259. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Parallelen ab und ef und noch eine dritte Gerade, welche erstere schneidet, berührt.

Fig. 321. Auflösung. Man erhält den Mittelpunkt des gesuchten Kreises in den Durchschnitt q zweier Winkelhalbirenden rs und po, und dessen Radius in der Normale aus q auf eine der Geraden.

Beweis. Denkt man die Dreiecke grq und hrq, so sind sie congruent, weil, nach 95, gr = rh, auch qr = qr und ∟grq = hrq ist. Nach 96. geht rs durch den Mittelpunkt des Kreises. Dieses läßt sich auch von den Dreiecken hqp und nqp beweisen.

Folglich ist q der Mittelpunkt des Kreises; und weil gq = hq = nq, so ist der Abstand q von den drei Geraden gleich und diese Linien sind Radien.

1. Anmerkung. Der Mittelpunkt q hätte auch, analog der vorigen Aufgabe, durch zwei Parallelen gefunden werden können, deren eine mit ab in dem halben Abstand der gegebenen Parallelen, die andere mit cd in gleicher Entfernung gelegt wurde; weil qn $= \frac{1}{2}$ ng und auch gleich hq sein muß.

2. Anmerkung. Wäre keine der gegebenen Linien der andern parallel, so hätte man die Aufgabe 296.

260. Es ist ein Punkt p und eine, ihrer Lage nach, bestimmte Gerade st gegeben; man soll mit einem Radius gleich r einen Kreis beschreiben, der p aufnimmt und die Gerade berührt.

Auflösung. Der geometrische Ort der Mittelpunkte Fig. 322.
von Kreisen, die einen Radius r haben und st berühren, ist die Parallele qo, welche von der Geraden den Abstand = r hat. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, die den Punkt p aufnehmen sollen, muß selbst ein mit dem Radius r aus p beschriebener Kreis sein. Derjenige Punkt, der, als Mittelpunkt des gesuchten Kreises, beiden Forderungen zugleich genügen soll, ist daher der Durchschnitt c.

261. Es ist die Linie h als Halbmesser eines Kreises gegeben, der eine Gerade ab berühren, und dessen Mittelpunkt auf einen andern Kreis liegen soll, welcher der Größe Fig. 323.
und Lage nach gegeben ist.

Auflösung. Fälle aus dem Mittelpunkt c des gegebenen Kreises auf die Gerade ab eine Normale qr, trage den gegebenen Halbmesser h in ro, ziehe durch o eine Parallele mp mit ab; so schneidet diese die Peripherie des Kreises c in zwei Punkten p und n. Beide Punkte können als Mittelpunkte des gesuchten Kreises dienen.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn h größer als qr und kleiner als rs angenommen wird.

262. Es sind zwei Punkte e und f und eine ihrer Lage nach bestimmte Gerade ab gegeben; man soll durch jene Fig. 324.
Punkte einen Kreis legen, der ab berührt.

Auflösung. Man ziehe die Richtung ef, bis sie ab trifft, suche zu ae und af die mittlere Proportionale (ai) und trage diese in ag. Legt man nun durch e, f und g einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Beweis. Da nach der Construction

$$ae : ai = ai : af$$

oder

$$ae : ag = ag : af$$

d. i.

$$ag^2 = ae \cdot af,$$

so ist, nach 94, ag Tangente des Kreises d im Berührungspunkte g; und die Punkte e und f liegen in Folge der Construction in seiner Peripherie.

263. Es ist ein Winkel bac und in seiner Ebene ein Punkt i gegeben; man soll einen Kreis zeichnen, der durch i geht, und beide Schenkel des Winkels tangirt.

1. Auflösung. Man halbire den gegebenen Winkel durch ad und ziehe hg normal ad durch i; mache mn gleich ni und beschreibe auf hm einen Halbkreis; errichte in i eine Normale ik und ziehe aus h mit dem Radius hk einen
Fig. 325. zweiten Halbkreis. In den Endpunkten des Durchmessers fl errichte noch die Normalen fe und ld, welche die Mittellinie des Winkels schneiden und in den Durchschnittspunkten e und d die Mittelpunkte zweier Kreise, von den Radien ef und dl, bestimmen werden, die beide den gegebenen Bedingungen entsprechen.

Beweis. Soll der Kreis beide Schenkel tangiren, so muß der Abstand seines Mittelpunktes diesen gleich sein, also seinen geometrischen Ort in der Mittellinie ad haben. Daher wird eine Normale durch i den gesuchten Kreis noch in einem Punkt m schneiden und diese Sehne im durch ad in n halbirt werden.

Nun ist, nach 62, hm : hk = hk : hi.

Betrachtete man hm als Secante und hf als Tangente des Kreises e, so müßte, nach demselben Satze,

hm : hf = hf : hi

sein. Es ist aber hf = hk, folglich hf wirklich Tangente eines Kreises e im Berührungspunkte f eines Kreises, der durch i, m geht und sich durch den normalen Radius fe bestimmt.

Für den Kreis zum Radius ld = di ist der Beweis eben so zu führen, und da die Mittellinie der geometrische Ort der Mittelpunkte ist, so gilt alles, was sich auf den Schenkel ab bezieht, auch für die Berührung des Schenkels ac.

Fig. 326. 2. Auflösung. Man halbire den gegebenen Winkel durch ak, ziehe durch den gegebenen Punkt n die Richtung an, fälle aus einem beliebigen Punkte c′ die Normale c′e auf den Schenkel af, mache c′h gleich c′e und ziehe nc parallel hc′: so erhält man in c den Mittelpunkt eines Kreises vom Radius ct.

Schneidet man ah aus c′ mit dem Radius c′e in i und zieht c″n parallel c′i, so ist c″ der Mittelpunkt eines zweiten Kreises vom Radius cn. Beide Kreise erfüllen die Forderungen der Aufgabe.

Beweis. Ist ct der normale Radius auf af (also af Tangente), so ist, weil ct parallel c′e,

$$ac' : ac = c'e : ct;$$

ferner, wegen der Parallelen c′h und cn,

$$ac' : ac = c'h : cn$$

daher $$c'e : ct = c'h : cn.$$

Weil aber c′e = c′h, so ist auch ct = cn; also ist c Mittelpunkt eines Kreises für diese Radien.

264. Fällt, mit Bezug auf die vorhergehende Aufgabe, der gegebene Punkt m in die Halbirungslinie des Winkels, so wird die Construction einfacher.

Auflösung. Die Normale in dem Punkt m wird dann Tangente der Kreise; und deren Mittelpunkte ergeben sich durch den Durchschnitt der Halbirungslinien derjenigen Winkel, welche diese Normale mit dem Schenkel ba bildet, in c und c′, und die Radien sind gleich den Abständen dieser Mittelpunkte von m. Fig. 327.

Beweis. Nach 96. und 95. sind em, ei und auch em, eh Tangenten der Kreise von den Mittelpunkten c′ und c, wie sich aus 27. leicht nachweisen läßt.

265. Es ist auf dem Schenkel eines rechten Winkels ein Punkt q gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher durch diesen Punkt geht, so daß eine Tangente in q mit dem Schenkel bc einen Winkel gleich α bildet; zugleich aber der Kreis den andern Schenkel berührt. Fig. 328.

Auflösung. Trage in q einen Winkel nqc = α, ziehe aus dem Durchschnitt r seines Schenkels mit dem des gegebenen Winkels einen Bogen vom Radius rq und errichte in q und p Normalen auf mn und ac. Der Durchschnitt o dieser Normalen ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und oq dessen Radius.

Beweis. Leicht.

266. In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu construiren, der Bogen und Radien des Quadranten berührt.

1. Auflösung. Halbire den rechten Winkel durch co, lege in den Halbirungspunkt q des Bogens die Tangente qd, beschreibe aus d mit dem Radius qd einen Bogen qn, errichte in n, wo dieser Bogen den Schenkel cd trifft, eine Normale nm und ziehe aus dem Durchschnittspunkt m den Kreis, dessen Radius mn ist. Fig. 329.

Beweis. Da der Abstand des gesuchten Mittelpunktes von beiden Radien gleich werden muß, so kann dieser Punkt nur auf der Halbirungslinie des Winkels liegen, und der Kreis und Viertelkreis müssen ihre innere Berührung auf jener Linie, als ihrer Centrale, haben.

Nun ist dq = dn, daher auch nm = qm, als Tangenten, und eine Normale pm wird ebenfalls gleich nm sein; folglich sind pm, mn und mq Radien des gesuchten Kreises und deren Endpunkte p, n, q die Berührungspunkte.

2. Auflösung. Man findet den Mittelpunkt des Kreises auch unmittelbar, wenn man die Winkel bcd und qdc halbirt, im Durchschnitt m dieser Halbirungslinien, und in dem Abstand mq den zugehörigen Radius.

Beweis. Verlängert man die Tangente qd, so ist in dem entstandenen Dreieck, nach 73, pm = mn = mq.

267. Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen andern gegebenen Kreis berührt.

Die Fälle, welche vorkommen können, je nachdem der Punkt eine oder die andere Lage gegen den Kreis hat, sind folgende:

Fig. 330. 1. Fall. Wenn der Punkt o in der Kreislinie liegt.

Auflösung. Dann ist die diametrale Richtung durch den Punkt o der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller innern und äußern Berührungskreise; die Anzahl derselben aber unbestimmbar.

2. Fall. Wenn der gegebene Punkt b außerhalb der Kreislinie und der Kreisebene liegt.

Fig. 331. Auflösung. Man ziehe eine diametrale Richtung durch b, halbire bd in c′ und beschreibe mit $\frac{1}{2}$ bd den Kreis. Dieser wird den gegebenen von außen in d berühren und b aufnehmen.

Anmerkung. Diese Auflösung ist jedoch keine allgemeine; denn es giebt noch eine unbestimmbare Anzahl anderer Kreise, welche die Forderungen bei äußerer oder innerer Berührung erfüllen, wie c‴ c^{IV} und c″.

Demohngeachtet liegt deren Zahl in gewissen Grenzen, die nicht überschritten werden können.

Zieht man nemlich von b eine Tangente an den Kreis, und durch den Berührungspunkt m eine radicale Richtung cm, so ist diese eine Linie, in welcher ein Mittelpunkt eines äußern Berührungskreises, der b aufnehmen soll, nicht mehr liegen kann.

Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller solcher Kreise eine Hyperbel, deren Brennpunkt der gegebene Punkt b, der Scheitel in c′, und deren Excentricität bc ist. Die Asymptote aber ist parallel cn.

Da nun die Zweige der Hyperbel die Asymptote niemals erreichen, so kann es auch keinen Kreis geben, dessen Mittelpnnkt in cn oder über diese Linie hinaus, nach a zu,

fiele, welcher bei äußerer Berührung durch den Punkt b gänge.

3. Fall. Wenn der Punkt d innerhalb der Kreisebene liegt.

Auflösung. Ziehe durch d einen Durchmesser, halbire da in c, oder db in c'', so sind diese Halbirungspunkte die Mittelpunkte zweier Kreise von den Radien cd und c''d, welche das Verlangte leisten. Fig. 332.

Anmerkung. Auch diese Auflösung ist nicht allgemein, und der Aufgabe unterliegt eine ähnliche Unbestimmtheit innerhalb gewisser Grenzen. Diese sind aber dadurch gesetzt, daß kein Radius kleiner als $\frac{1}{2}$ bd und größer als $\frac{1}{2}$ ad sein kann.

Bestimmtheit erhalten der zweite und dritte Fall dann, wenn bedingt wird, daß der Mittelpunkt auf der diametralen Richtung durch den gegebenen Punkt liegen soll. Der erste Fall bleibt immer unbestimmt.

268. Einen Kreis mit einem Radius, gleich r, zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt p geht und einen andern Kreis c berührt.

1. Auflösung. Man nehme die Summe der gegebenen Radien r + cg und beschreibe mit ihr aus c einen Bogen bei c', den man aus p mit dem Radius r schneidet. Fig. 333.

Der Mittelpunkt eines äußern Berührungskreises der, durch p geht, liegt in dem Durchschnitte c', und der Berührungspunkt in der Centrale cc'.

Beweis. Leicht.

2. Auflösung. Beschreibt man aus p mit dem Radius r einen Bogen bei c'' und schneidet diesen aus c mit einem Radius, gleich der Differenz r — cg; so ergiebt sich im Durchschnitt c'' der Mittelpunkt eines zweiten Kreises, welcher den gegebenen in der centralen Richtung c''c in t berührt, so daß er leztern einschließt.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Außer den beschriebenen lassen sich noch zwei Kreise construiren, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

269. Es ist ein Kreis c und eine Gerade mn gegeben, es soll ein anderer Kreis construirt werden, der die Gerade in o und auch den Kreis berührt.

1. Auflösung. Errichte in dem gegebenen Punkte o eine normale Richtung gc'', mache og gleich ch, dem Radius des Kreises c, ziehe cg und in deren Mitte e eine Normale, welche gc'' in einem Punkte c' schneiden wird. Fig. 334.

Dieser Durchschnitt ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher, mit dem Radius c′o beschrieben, die Bedingungen der Aufgabe erfüllt und den gegebenen außen berührt.

2. Auflösung. Macht man of gleich ch, zieht cf und errichtet in deren Mitte eine Normale dc″, so erhält man in c″ den Mittelpunkt eines Kreises, der, mit dem Radius c″o beschrieben, der Aufgabe ebenfalls Gnüge leistet und den gegebenen Kreis berührend einschließt.

Beweis. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Berührungskreise für mn in o ist, nach 78, die Normale gc″. Die Centrale c′c muß nach 115. b, gleich der Summe der Radien sein, wenn die Berührung eine äußere ist. Es ist aber og + oc′ = c′h + hc, weil das Dreieck gcc′ gleichschenklich construirt worden ist, daher ist c′ der Mittelpunkt des einen Berührungskreises.

Bei der zweiten Auflösung hat man die Differenz der Radien fc″ gebildet, wodurch oc″ — ch = cc″ wird; folglich ist c″ der Mittelpunkt eines andern Berührungskreises.

270. Es soll ein Kreis vom Radius r beschrieben werden, welcher eine der Lage nach gegebene Gerade ab und einen Kreis c berührt.

Fig. 335. 1. Auflösung. Beschreibe aus c einen Bogen uv mit der Summe der Radien cq + r; errichte auf ab beliebig eine Normale st und mache sie gleich r; durch s ziehe dann fe parallel ab: so schneidet diese den Bogen uv in c′, dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises.

Beweis. Da bei äußerer Berührung der Abstand des Mittelpunktes c′ vom gegebenen Kreise, gleich r, sein muß, so ist die Centrale = r + cq, also der Bogen uv der geometrische Ort aller berührenden Kreise vom Radius r. Und da auch der Abstand der Mittelpunkte dieser Kreise, für die Berührung von ab, gleich r, ist, so findet sich für diese der geometrische Ort in der Parallele fe. Für beide Berührungen kann daher der Mittelpunkt nur in dem Durchschnitt c′ liegen.

2. Auflösung. Der Mittelpunkt d eines zweiten Kreises vom Radius r, welcher die Gerade in w und den gegebenen Kreis in x berührt und ihn einschließt, liegt in dem Durchschnitt der Parallele ef und eines aus c concentrisch beschriebenen Bogens vom Radius r — cq.

Anmerkung. Ist die Summe der beiden Radien kleiner als der Abstand des Mittelpunktes c von ab, so wird die Aufgabe unmöglich.

271. Es soll ein Kreis beschrieben werden, der durch einen gegebenen Punkt g geht und eine, der Lage nach gegebene, Gerade ed und einen Kreis c berührt.

Auflösung. Man fälle aus dem Mittelpunkte c eine Normale auf ed, schneide letztere durch die Richtung ag in d, suche zu ag, ah, ae die vierte Proportionale und trage diese in ab. Fig. 336.

Hierauf construire man, nach Aufgabe 262, einen Kreis, der durch g und b geht, und ed berührt, so ist dieser der verlangte.

Beweis. Für die Berührung in f und Aufnehmung des Punktes g, aus der Aufgabe 262. Es ist dann noch zu beweisen übrig, daß die Centrale cc′ gleich der Summe der Halbmesser ist, daß sich also auch die Kreise berühren.

Man ziehe die gemeinschaftliche Tangente mn; auf sie normal cp und fo und verbinde mc′, so ist, nach 97, fq gleich dem Radius des Kreises c′. Fällt man noch aus dem Berührungspunkte p die Normale pq, so ist diese parallel ce, es schneiden sich pq, mc′ und fo in dem Punkte q und es ist, weil auch cp parallel of ist, $fq + qo = fq + cp = c'p + pc$.

Anmerkung. Man kann noch einen Kreis vom Mittelpunkte c″, dessen Berührung eine innere ist und der die Forderung erfüllt, bilden, wenn man anstatt der Verbindungslinie ag, die hg zieht und dann, wie oben, verfährt, zum dritten Gliede der Proportion aber he nimmt.

272. Einen Kreis zu zeichnen, der einen andern berührt und eine gegebene Linie bt als Sehne aufnimmt, d. i. durch die Punkte b und t geht.

1. Auflösung. Man nehme in der Peripherie des gegebenen Kreises c′ einen Punkt o beliebig an, lege durch t, b, o einen Kreis c″, ziehe durch dessen Durchschnitt f eine Richtung fo, bis sie die verlängerte tb schneidet. Fig. 337.

Durch diesen Durchschnittspunkt p lege man, nach Aufgabe 249, die Tangenten pq und ps und construire einen Kreis c durch b, t und m.

Dieser Kreis ist der verlangte für die äußere Berührung.

Beweis. Bei dem Kreise c″ und dessen Secanten hat man

$$pf \,.\, op = pt \,.\, pb$$

und in Beziehung des Kreises c′

$$pf \,.\, op = pm_q$$

daher ist $$pm_q = pt \,.\, pb$$

und folglich pm auch Tangente des Kreises c (worin bt Segment der Secante pt ist) nemlich in dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte m.

2. Auflösung. Für innere Berührung ergiebt sich der Kreis c″, wenn man, anstatt der Tangente ps, die pq zur Construction anwendet.

Anmerkung. Sollten die Richtungen of und tb keinen Durchschnitt geben, also parallel sein, so hätte man aus c′ eine Normale auf tb zu fällen. Die Durchschnittspunkte dieser Normalen mit der Peripherie des gegebenen Kreises gäben dann die Berührungspunkte und man hätte die Kreise durch einen dieser Punkte und durch t, b zu legen.

273. In der innern Ebene zweier Convergirenden op und mn ist ein Kreis c gegeben; man soll einen zweiten beschreiben, der op und mn und auch den erstern Kreis berührt.

Fig. 338. 1. Auflösung. Man halbire die Winkelebene, nach Aufgabe 70, durch bc′, errichte in einem beliebigen Punkte auf mn die Normale ol, trage in ou den Radius or des gegebenen Kreises, ziehe ab parallel mn und verbinde den Durchschnittspunkt b mit dem Mittelpunkte c. Ferner fälle man eine beliebige Normale ih auf ab und schneide mit dieser die Linie bc aus i. Zieht man noch durch c eine Parallele c′r mit ik, so schneidet diese in c′ den Mittelpunkt eines Kreises, welcher den Bedingungen entspricht, die beiden Convergenten berührt, und den Kreis c berührend einschließt.

Beweis. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche die Schenkel der gegebenen Winkelebene berühren, ist nothwendig die Halbirungslinie dieser Ebene; der Abstand des Berührungspunktes r vom Mittelpunkte des Kreises c′ ist in vorliegendem Falle die Centrale cc′, vermehrt um den Radius des gegebenen Kreises; und diese Summe $cc' + cr$ muß gleich sein dem Abstand des Mittelpunktes c′ von jeder der convergirenden Linien, und der Fußpunkt dieser normalen Abstandslinie ist Berührungspunkt. Also ist c′q Radius, der Winkel $c'qu = c'ab = R$; und da $c'a \mathrel{+\!\!\!\!|\!\!\!\!+} ih$, $cc' \mathrel{+\!\!\!\!|\!\!\!\!+} ik$, so hat man

$$bi : ih = bc' : ac'$$

und $$bi : ik = bc' : cc',$$

es ist aber $$ih = ik$$

folglich auch $$ac' = cc';$$

und da auch $aq = uo = cr,$
so ist $ac' + cr = cc' + cr$
d. i. $c'q = c'r.$
Es hat aber ein Punkt auf bc' immer gleichen Abstand von jeder der Convergirenden, also ist auch die Normale in c' Radius des Berührungskreises von mn und po.

2. Auflösung. Man construire wieder die Halbirungslinie c''q, ziehe mit dem Abstande, gleich dem Radius des gegebenen Kreises, qs ∦ op und qt ∦ mn; construire, nach Aufgabe 263, einen Kreis c', der durch den Mittelpunkt z des gegebenen geht, und die Schenkel des Winkels sqt berührt. Fig. 339.

Dieser ist concentrisch dem zu suchenden und eine Normale aus c' auf mn der Radius des letztern.

Beweis. Auch hier ist die Halbirungslinie der Winkelebene geometrischer Ort der Mittelpunkte aller bedingungsgleichen Kreise. Da nun auf allen Normalen, die auf mn oder op gefällt werden, durch die Parallelen qt und qs immer eine Länge gleich rn, gleich dem Radius des Kreises z, abgeschnitten wird; so muß der Radius eines Kreises, der durch den Mittelpunkt z geht und die Schenkel des Winkels tqs berührt, um rn kleiner sein als der gesuchte; d. h. ein Kreis, dessen Radius $= c'c + rn = c'u$ ist, wird die Convergirenden und den gegebenen Kreis berühren.

Anmerkung. Außer dem hier beschriebenen Kreis c', läßt sich noch ein Kreis c'' zeichnen, der die Bedingungen erfüllt, wenn man die Parallelen mit dem Abstande rn außerhalb der Winkelebene in o'p' und m'n' zieht und im übrigen wie vorher verfährt. Ist c''z der Radius des Hülfskreises, so ist der des gesuchten Kreises gleich $c''z - rn$; und war beim vorigen Verfahren die Berührung eine innere, so ist sie jetzt eine äußere. Gleichermaaßen lassen sich auf der convergirenden Seite noch zwei Kreise bilden, welche den Forderungen Gnüge leisten.

274. Einen Kreis vom gegebenen Halbmesser, gleich r, zu beschreiben, welcher zwei andere, der Größe und Lage nach gegebene, c' und c berührt.

Auflösung. Beschreibe aus c mit der Summe der Halbmesser $ct' + r = cc''$ einen Bogen und schneide ihn mit der Summe der Halbmesser $c't + r = c'c''$. Der Durchschnitt ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und die Punkte t und t' der Centralen sind die Berührungspunkte. Fig. 340.

Beweis. Aus 115.

275. Es sind zwei Kreise a, b ihrer Größe und Lage nach gegeben; man soll einen dritten beschreiben, der die beiden ersten berührt, und zwar den Kreis a in dem Punkte m. Man unterscheide folgende Fälle:

1. Fall. Wenn die gegebenen Kreise sich berühren.

Fig. 341. Auflösung. Ziehe die Centrale ab und die Richtung am; desgleichen die Tangenten in den Punkten m und n und aus deren Durchschnittspunkt d noch die Tangente dp.

Eine Richtung, die man durch den Berührungspunkt p und den Mittelpunkt b legt, schneidet dann die Richtung am in dem Mittelpunkt c des gesuchten Kreises, dessen Radius gleich cm ist.

Beweis. Nach 95 sind die Tangenten dm = dn und dn = dp, mithin dm = dn = dp. Daher sind die Dreiecke mdc und dpc congruent, also mc = pc und sind, nach 78, diese Linien Radien des Kreises c.

2. Fall. Wenn sich die gegebenen Kreise nicht berühren.

Auflösung. Man ziehe den Radius am, schneide auf diesem ein Stück md, gleich dem Radius des andern Fig. 342. gegebenen Kreises b, ab, ziehe bd und mn parallel bd. Die Parallele mn wird den Kreis b in n, dem Berührungspunkte mit dem gesuchten, treffen, und die Richtung bn dessen Mittelpunkt im Durchschnitt c bestimmen.

Anmerkung. Diese Auflösung ist allgemeiner als die des ersten Falles und schließt auch jene ein. Es wird aber der Durchschnitt n oft unsicher werden. Dieses läßt sich aber verbessern, wenn man in der Mitte von bd eine Normale errichtet, die auch durch c gehen wird.

275, a. Man soll einen Kreis construiren, der zwei andere c und c′ berührt und durch einen gegebenen Punkt f geht.

Auflösung. Man ziehe die centrale Richtung cc′ und zwei parallele Halbmesser bc und hc′, durch deren Endpunkte noch die Richtung bh. Den Durchschnitt a verbinde Fig. 343. mit dem gegebenen Punkte f durch die Richtung ad und ziehe auch durch a eine Tangente an den Kreis c, welche auch Tangente an den Kreis c′ sein wird.

Nun suche zu af, ai und ag die vierte Proportionale, trage diese in ad und lege durch d und f einen Kreis c″, nach Aufgabe 272, der einen der gegebenen berührt; so wird dieser auch den andern berühren und der gesuchte sein.

Beweis. Nach 120. ist a äußerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise c und c′, und, nach 123, sind ab und ag Aehn=

lichkeitslinien derselben. Daher wird, nach 124, die Tangente ag auch Tangente des Kreises c′ sein.

Nun ist in dem Kreise c″, nach 93.

$$af \cdot ad = am \cdot an.$$

Für die Kreise c und c′ ist aber das Rechteck am . an, nach 131, ihre gemeinschaftliche Potenz für den Aehnlichkeitspunkt a; folglich sind die Punkte m und n zugleich Punkte des Berührungskreises c″ und resp. der Kreise c und c′. Für einen dieser Punkte ist, durch Construction, der Kreis c″ berührend und weil nm verlängert durch a geht, so ist, nach 132, auch der andere Berührungspunkt.

Anmerkung. Mit Benutzung des äußern Aehnlichkeitspunktes läßt sich noch ein Kreis sop beschreiben, der die gegebenen gleichartig, nemlich von innen berührt. Nimmt man den innern Aehnlichkeitspunkt, so ergeben sich zwei Kreise, welche beide die gegebenen ungleichartig berühren, wie fxy und vfw. Es lassen sich also vier Kreise beschreiben, welche die Bedingungen erfüllen.

276. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade mn und zwei ungleiche Kreise von den Radien ci und c″h, die ihrer Lage nach gegeben sind, berührt.

Auflösung. Man fälle aus einem der Mittelpunkte c eine Normale cf auf die gegebene Gerade mn, mache deren Verlängerung fd gleich dem Radius des kleinern Kreises c″ und ziehe ab parallel mn durch d. Beschreibe ferner aus c einen concentrischen Kreis mit einem Radius, gleich der Differenz ci — c″h der Radien beider gegebenen Kreise, und nach, Aufgabe 271, einen andern c′, der durch c″ geht und den Hülfskreis c und die Gerade ab berührt. Fig. 344.

Mit diesem ist dann der gesuchte Kreis concentrisch und sein Radius gleich dem normalen Abstand des Mittelpunktes c′ von mn.

Beweis. Im vorliegenden Falle ist der Radius des gesuchten Kreises gleich c′l = c′i = c′h.

Nun ist $\quad ck = ci - c''h$

und $\quad c'k = cc''.$

Da nun die Summe der Radien c′k + ci = cc′ + ik, so ist die Centrale cc′ um ik kleiner als jene Summe und auch größer als ihre Differenz; daher schneiden sich, nach 114, diese Kreise.

Ferner ist die Summe der Halbmesser c′ c″ + c″h größer als c′ c″, und zwar um c″h = ik. Auch ist der Radius c′g = c′l + lg, also um lg = ik größer als der Abstand der Geraden mn : daher wird ein Kreis, des-

sen Radius gleich ist ck — ik die beiden gegebenen Kreise und die Gerade berühren.

Anmerkung. Für gleichartige, innere Berührung findet noch ein Kreis statt, der zugleich die Gerade mn berührt. Außer diesem aber noch zwei für ungleichartige Berührung. In Allem giebt es also vier bedingungsgleiche Kreise.

276 a. Es sind zwei Kreise c° und c^{IV} gegeben, man soll einen dritten beschreiben, der jene beiden berührt, und dessen Mittelpunkt in ihrer Centrale liegt.

Auflösung. Man ziehe die Centrale und halbire den Ueberschuß de derselben über die Summe der beiden Radien, so ist c' der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise, welcher die gegebenen von außen berührt.

Fig. 345. Halbirt man die verlängerte Centrale ab, so erhält man in c'' einen Kreis vom Radius c''a, der die gegebenen berührend einschließt.

Für noch zwei andere ungleichartig berührende Kreise findet man die Mittelpunkte in c und c''', wenn man bd und ae halbirt.

Beweis. Aus 115.

277. Es sind drei ungleiche Kreise c, c'' und c''' gegeben; es soll ein vierter beschrieben werden, welcher die drei genannten berührt.

Auflösung. Ist c'''h der Radius des größten und cd der des mittlern Kreises, so beschreibe man aus c einen
Fig. 346. Kreis, dessen Radius gleich ist der Differenz der Radien von c und c'', d. i. gleich cd — bd; aus c''' einen dergleichen mit der Differenz der Radien von c'' und c''', d. i. gleich c'''h — ah.

Suche dann, nach Aufgabe 275, den Mittelpunkt c' eines Kreises, welcher die Hülfskreise, welche man mit jenen Differenzen beschrieben hat, berührt und durch den Mittelpunkt c'' geht. Da dieser concentrisch dem gesuchten Kreise ist, so kann letzterer mittelst einer gezogenen Centrale c' c'' und des dadurch erhaltenen Berührungspunktes m leicht beschrieben werden.

Beweis. cb = cd — bd,
c'''a = c'''h — ah;
weil aber c''m = bd = ah,
so ist auch cd — cb = c'''h — c'''a
d. i. bd = ah = c''m.

Der Radius des Hülfskreises ac''b muß also um c''m vermindert werden, und dann ist jede der drei Centralen c' c'',

$c'c$ und $c'c'''$ gleich der Summe der beziehlichen Radien, und der gefundene Kreis wird, nach 115, die gegebenen berühren.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise lassen sich die Mittelpunkte noch dreier Kreise finden, von denen

A, die drei gegebenen gleichartig von innen berührt,

B, zwei derselben berührend einschließt, den dritten aber außen berührt, und

C, zwei derselben außen berührt, den dritten aber einschließt.

278. In ein regelmäßiges Vieleck von n Seiten sollen n Kreise so beschrieben werden, daß jeder eine Seite des Vielecks und seine beiden Nebenkreise berührt.

Auflösung. Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf den Normalen, die aus dem Mittelpunkt des Vielecks auf die Seiten gefällt werden, und die Kreise selbst sind diejenigen, welche man in die Dreiecke zu beschreiben hat, in welche das Polygon aus der Mitte zerlegt werden kann.

Beweis. Leicht.

279. Mit Beibehaltung der Kreisberührung der vorigen Aufgabe, soll jeder der eingeschriebenen Kreise zwei Polygonseiten berühren.

Auflösung. Hier liegen die Mittelpunkte der gesuchten Kreise auf den Radien nach den Ecken, und zwar in den Durchschnittspunkten dieser Radien, mit den Halbirungslinien der rechten Winkel, welche eine Normale aus dem Mittelpunkte in der Mitte jeder Seite des Polygons bildet. Der Radius dieser Kreise ist gleich dem Abstand eines solchen Durchschnittpunktes von einer Seite des Vielecks.

Beweis. Leicht.

280. In ein gegebenes Dreieck abd drei Kreise so zu beschreiben, daß jeder von ihnen zwei Seiten und auch seine beiden Nebenkreise berühre *).

1. Auflösung. Man halbire die Winkel des Dreiecks durch ac, bc′ und dc″. In die so entstandenen secundären Dreiecke beschreibe man, nach Aufgabe 296, Kreise o, o′, o″, welche die drei Seiten berühren. Durch den Berührungspunkt t′ lege man an den Kreis o′, durch den t an den Kreis o″ und durch den Berührungspunkt t″ an den Kreis o Tangenten, welche sich in q schneiden werden, und beschreibe wieder in jedes dieser tertiären Dreiecke, welches von einer jener Tangenten und zwei Seiten des Ur- Fig. 347.

*) Um die Figur mit Linien nicht zu überladen, sind die Halbirungslinien nicht ganz gezeichnet worden.

dreiecks gebildet wird, einen Berührungskreis, so wird jeder dieser letztern Kreise c, c′, c″ zwei Seiten des gegebenen Dreiecks und zwei der gefundenen Kreise, wie verlangt worden, berühren.

2. Auflösung. Zuerst verfahre man, wie Auflösung 1., und suche die drei Berührungspunkte der Hülfskreise, nehme diese zu Mittelpunkten dreier Kreise von nachstehenden Radien, als:

den Radius des Kreises t′ gleich bt′ — bt und den des Kreises t″ gleich dt″ — dt; indeß der Radius des Kreises t auf der kürzesten Seite Null bleibt.

Nun suche, nach Aufgabe 275, den Mittelpunkt desjenigen Kreises, der durch den Punkt t geht und die andern beiden außerhalb berührt. Diesen Mittelpunkt q verbinde mit t, t′ und t″, wodurch sich drei Vierecke ergeben, die den Seiten nach centrisch sind. In diese beschreibe man neue Kreise, und diese sind die gesuchten.

1. Anmerkung. Die Beweise dieser Auflösungen sind zu umfassend, als daß sie hier Platz finden könnten.

Wer sich mit den Sätzen, worauf sie basirt werden müssen, näher bekannt machen will, der findet sie in Crelle's Journal für ꝛc. Mathematik, Band I, pag. 178; Band X, pag. 300; Band XI, pag. 117 und 127; ferner in van Schwinden's Elemente der Geometrie, Uebersetzung von Jacobi, pag. 246 und folgende. Auch ist in dem erstgenannten Werke, Band X, pag. 300 ein, von Zornow mitgetheilter, Beweis zu finden.

2. Anmerkung. Die Aufgabe ist unter dem Namen der „Malfatti'schen" bekannt.

281. Es sind drei Kreise M_1, M_2, M_3 der Größe und Lage nach gegeben, man soll drei andere m_1, m_2, m_3
Fig. 348. finden, welche einander (in den Punkten b_1, b_2, b_3) berühren, und von welchen zugleich der Kreis m_1 die Kreise M_2 und M_3, der Kreis m_2 die Kreise M_1 und M_3, und der Kreis m_3 die Kreise M_1 und M_2 berührt.

Auflösung. Man suche, nach 120, die drei äußern Aehnlichkeitspunkte A_3, A_2, A_1, welche zu den Kreisen M_1, M_2, M_3 paarweise genommen gehören*) und construire die

---

*) Man ziehe nemlich die Centrale je zweier Kreise und in ihnen zwei parallele Radien auf einerlei Seite der Centrale; dann eine Verbindungslinie der Endpunkte dieser Radien (äußere Aehnlichkeitslinie), welche die Centrale in einem Punkte, dem äußern Aehnlichkeitspunkte, schneidet.

zu diesen Aehnlichkeitspunkten gehörenden Potenzkreise A_3, A_2, A_3 *)), deren Radien A_3C_3, A_2C_2, A_1C_1 sind, und welche Kreise sich in einem Punkte D schneiden werden.

Hierauf beschreibe man, nach Aufgabe 277, die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste die drei Kreise M_2, A_2, A_3, der zweite die drei Kreise M_2, A_3, A_1 und der dritte die Kreise M_3, A_2, A_1 berührt.

Ferner beschreibe man, nach Aufgabe 275, einen Kreis, dessen Peripherie $b_1\ B_1\ \beta_1$ durch den Berührungspunkt B_1 der Kreise M_1 und μ_1 geht, und welcher die Kreise μ_1, μ_3 berührt, jedoch so, daß er den Kreis μ_3, der von dem kleinern der beiden Kreise M_2, M_3 abhängig ist, einschließend berührt: so ist endlich derjenige Kreis m_2, welchen man so beschreibt, daß er die Kreise M_1 und M_3 und auch den Kreis $b_1\ B_1\ \beta_1$ berührt, einer der gesuchten Kreise.

Die beiden übrigen verlangten Kreise m_3 und m_1 findet man auf ähnliche Weise. Der Kreis m_3 kann z. B. aus der vorherstehenden Construction unmittelbar gefunden werden, wenn man statt des Kreises m_2 zuletzt einen Kreis m_3 beschreibt, welcher die Kreise M_1, M_2, und den Kreis $b_1\ B_1\ \beta_1$ berührt.

Man bemerke, daß die beiden Kreise m_2 und m_3 den Hülfskreis $b_1\ B_1\ \beta_1$ in demselben Punkte berühren.

Anmerkung. Von dem Beweise dieser Construction gilt dasselbe, was Anmerkung 1. der vorigen Aufgabe gesagt worden ist. Die Aufgabe ist aus Crelle's Journal der ꝛc. Mathematik, Band I, pag. 180 entnommen, wo man die Begründung der Construction ausführlich dargelegt findet.

282. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser, gleich r, zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt p geht, und eine Kreislinie c′ halbirt.

Auflösung. Mit einem Radius, gleich r, beschreibe man aus p einen Bogen qn, ziehe einen beliebigen Durchmesser ab und bilde auf diesem mit dem Radius r das gleichschenkliche Dreieck aob; aus c′ schneide mit dem Ra- Fig. 349.

*) Um diese Potenzkreise (man sehe 128, 129) zu finden, ziehe man aus A_3 eine Tangente an die Kreise M_2 und M_1, welche dem Aehnlichkeitspunkt A_3 zugehören; halbire die zwischen beiden liegende gemeinschaftliche Tangente in k (Punkt gleicher Potenzen für diese Kreise). Aus k ziehe durch die beiden Berührungspunkte einen Kreis und lege an letztern aus A_3 eine Tangente: so ist diese das Maaß des Radius $A_3\ C_3$ für den Potenzkreis A_3. Eben so verfahre man mit den andern beiden Paaren, um die Radien der beziehlichen Potenzkreise zu finden.

dius c'o den Bogen qn in c: so ist c der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche, vom Radius r, durch den Punkt p gehen, ist ein Kreis, wovon qn ein Stück ist.

Ferner ist der geometrische Ort der Spitzen aller gleichschenklichen Dreiecke, welche einen Durchmesser zur ungleichen Seite und den gegebenen Radius r zur gleichen Seite haben, ein, mit dem gegebenen concentrischer, Kreis, dessen Radius gleich der Höhe jenes Dreiecks ist. Es ist aber zugleich dieser letztgenannte Kreis mos ... der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die, mit dem Halbmesser r beschrieben, einen Durchmesser ab, ed, ... als Sehne in dem gegebenen Kreise abschneiden, also die Kreislinie halbiren: daher kann, für beide Bedingungen beziehlich, nur der Durchschnitt c Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein.

283. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte o, p geht und eine gegebene Kreislinie halbirt.

Fig. 350. Auflösung. Man ziehe durch den gegebenen Punkt o und den Mittelpunkt n des gegebenen Kreises die Richtung on, suche zu on und zu dem Radius nr die dritte Proportionale und trage sie in mn, lege durch m, p und o einen Kreis; so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Nach der Construction ist on . nm = nr_q, und weil nr und nq Radien sind, auch on . nm = nr . nq; folglich sind, nach 92, om und qr Sehnen eines Kreises.

Zugleich ist qr aber Durchmesser des gegebenen Kreises, daher wird letzterer durch den gefundenen Kreis halbirt.

284. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte b, h geht und einen Kreis m so schneidet, daß die gemeinschaftliche Sehne fg einer gegebenen Linie n gleich sei.

Fig. 351. Auflösung. Verbinde bh, errichte in der Mitte c eine Normale cd und suche zu n, bh und dem Radius des gegebenen Kreises mf die vierte Proportionale. Mit dieser, gleich mk, ist die Centrale der beiden Kreise gefunden, und man erhält den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, wenn man mit dieser Proportionale die Normale cd aus m schneidet. Der Radius des Kreises k ist bk = hk, und gf ist gleich n.

Beweis. Zieht man durch q und k Parallelen normal mk, macht b'h' gleich bh, so daß b'k = kh' wird, und verbindet noch b',m und h',m: so erhält man die ähnlichen

gleichschenklichen Dreiecke b'hm und g'f'm. In diesen ist, nach 60,

$$g'f' : b'h' = mq : mk$$

und nach der Construction

$$n : bh = mq : mk$$

da nun bh = b'h', so ist auch g'f' = n.

Zieht man ferner den Durchmesser gn' und dann n'f und fg, so ist fn' normal fg; und weil auch der Winkel mqf' = R, und qf' = g'q ist, so ergiebt sich, mit Bezug auf 114, das Viereck g'f'gf als Parallelogramm; folglich ist gf = g'f' = n. Nach 83. ist cd der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch b und h gelegt werden können; und weil auch in der vierten Proportionale die, dem Dreieck b'hm zukommende, Höhe mk gefunden worden; so ist leicht nachzuweisen, daß die Kreislinie aus k, die gf aufnimmt, auch durch die Punkte b und h geht.

285. Einen Kreis, dessen Radius, gleich r, gegeben ist, so zu legen, daß er eine gegebene Gerade tu berührt und die, ihrer Lage und Größe nach bestimmte, Kreislinie h halbirt.

Auflösung. Man errichte in einem beliebigen Punkte auf tu eine Normale po, gleich r, und ziehe durch o mit tu die Parallele mn. Durch den Mittelpunkt h lege man einen Durchmesser cd und beschreibe aus c und d mit einem Radius, gleich r, die Durchschnittsbogen bei q; aus h aber mit dem Radius hq einen concentrischen Bogen fg. Dieser schneidet die Parallele mn in dem Mittelpunkt s des gesuchten Kreises. Fig. 352.

Beweis. Für alle Kreise vom Radius r, welche tu berühren, ist die Parallele mn der geometrische Ort. Für alle Kreise vom Radius r, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers, wie cd, ab, ... gehen, ist der concentrische Kreis fqs ... geometrischer Ort der Mittelpunkte: also ist, für beide Beziehungen zugleich, der Durchschnitt s Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

286. Man soll einen Kreis, dessen Radius, gleich r, gegeben ist, construiren, welcher zwei ihrer Lage und Größe nach bestimmte Kreise so schneide, daß deren mit ihm gemeinschaftliche Sehnen gleich m' und n' seien. Fig. 353.

Auflösung. Man trage in den Kreis c' eine Sehne qr = n' beliebig, ziehe c'a normal und schneide diese Normale aus r mit einem Radius = r. In den Kreis c trage man die andere Sehne m' beliebig, in tu, ziehe eben-

falls bc normal und schneide letztere Richtung aus t mit dem Radius r.

Nun beschreibe man aus c' mit c'a und aus c mit cb die Bogen bei c'', so erhält man in ihrem Durchschnitt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Leicht.

287. Es sollen zwei Kreise mit den Radien r und r' so beschrieben werden, daß sie sich unter einem Winkel α schneiden; d. h. daß die in einen ihrer Durchschnittspunkte
Fig. 354. a gelegte Tangenten den Winkel α bilden.

Auflösung. Man trage in bac den gegebenen Winkel α, ziehe ac' normal ac und ac'' normal ab und mache diese Normalen gleich r und r': so sind c' und c'' die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Die Kreise, sagt man, schneiden sich rechtwinklich, wenn $\alpha = R$ ist.

288. Es sind drei Kreise A, B und C der Größe und Lage nach gegeben. Diese haben den Punkt d gemein, und man soll durch d eine Gerade so ziehen, daß deren Segmente zwischen den Peripherien, nemlich hi, hk und ik
Fig. 83. sich verhalten wie m' : n' : o'.

Auflösung. Man ziehe nach Aufgabe 60, durch den Punkt d die Linie dk so, daß die Abstände der Projectionen von den Mittelpunkten C, B und A, nemlich dg, gf und fe, sich wie m' : n' : o' verhalten, so ist die Aufgabe gelößt.

Beweis. dh = 2dg; di = 2df und dk = 2de, nach 82; daher ist hi = 2df — 2dg = 2gf; hk = 2de — 2dg = 2ge und ik = 2de — 2df = 2fe.

Nach der Construction ist aber

$$gf : ge : fe = m' : n' : o'$$

oder $2gf : 2ge : 2fe = m' : n' : o'$

also ist auch $hi : hk : ik = m' : n' : o'$.

289. Es sind zwei Kreise c, c' gegeben, man soll einen dritten beschreiben, der beide rechtwinklich schneidet.

Auflösung. Man ziehe die gemeinschaftliche Tangente dd', halbire sie in c und lege durch c die Richtung ab nor-
Fig. 355 mal der Centrale cc'. Man hat dadurch in c einen Punkt
und 356. gleicher Potenzen für beide Kreise und in der Normale ab deren Potenzlinie gefunden. In Figur 356. ist die gemeinschaftliche Sehne, ihrer Richtung nach, diese Potenzlinie unmittelbar.

Alle Kreise, deren Mittelpunkte auf der Potenzlinie liegen und deren Radius gleich dem Potenzmaaße dieses

Punktes c ist, d. h. welcher irgend einer der Tangenten gleich ist, die man aus c'' an einen der Kreise zieht, wie c''m, schneidet die gegebenen Kreise rechtwinklich.

290. Es sind zwei Kreise gegeben, deren Mittelpunkte c, c' sind; man soll vier andere Kreise so beschreiben, daß sie je zu zweien, einen jeden der gegebenen Kreise in zwei Punkten (m, n, o, p) berühren.

Auflösung. Man suche nach voriger Aufgabe einen Kreis, der die gegebenen rechtwinklich schneidet. Dieser Kreis sei c'' und die Durchschnittspunkte seien m, n, o und p. Zieht man dann aus den Mittelpunkten c und c' die Richtungen cm, cn, c'o, c'p, so schneiden sich diese gehörig verlängert in den Punkten a, a', a'' und a''', und diese sind die Mittelpunkte der vier gesuchten Kreise, deren Radien aus der Figur leicht ersichtlich sind. Fig. 357.

291. Es sind zwei Kreise N und n in einander liegend gegeben, man soll unter den Kreisen, die zwischen den gegebenen, sie ungleichartig berührend, gezogen werden können, denjenigen finden, dessen Quotient in Bezug auf eine gegebene Richtung ap oder ap' oder ap'' ein Maximum, oder ein Minimum ist, d. h. daß, wenn man aus den Mittelpunkten jener möglichen Kreise nach der gegebenen Richtung beliebig Parallelen zieht, und diese durch die Radien der respectiven Kreise dividirt, von diesen Quotienten dem gesuchten Kreise der größte oder der kleinste zugehöre. Fig. 358.

Auflösung. Man beschreibe einen beliebigen Kreis K, welcher die Kreise N und n in den Punkten b, b', B und B' schneidet und ziehe die Secanten bC und BC, auf denen die gemeinschaftlichen Sehnen bb' und BB' liegen.

Aus dem Punkte C fälle man auf die centrale Richtung NG die Normale CGa, welche die Linie der gleichen Potenzen beider gegebenen Kreise ist. Aus dem Durchschnittspunkte a der gegebenen Richtung ap lege man die Tangenten ae, ae', ad und ad' an die gegebenen Kreise und beschreibe nach Aufgabe 275. diejenigen beiden Kreise, von denen der erste die gegebenen Kreise in den Punkten e, d und der letztere in e', d' berührt, so sind diese die gesuchten Kreise.

Beschreibt man die Kreise, welche die gegebenen respective in den Punkten e'd und ed', also gleichartig berühren, so leisten auch diese das Verlangte.

Anmerkung. Die Auflösung dieser Aufgabe findet auf ähnliche Weise auch bei Kreisen Anwendung, die ganz auseinander liegen.

Beweis. Da jeder andere, zwischen den gegebenen Kreisen liegende und sie ungleichartig berührende, Kreis mit einem beliebigen dritten berührenden immer einen andern Aehnlichkeitspunkt als a hat; so kann der, durch die Tangente an die Kreise m und N gefundene, Aehnlichkeitspunkt a nur diesen beiden gedachten Kreisen zukommen, und es werden alle äußere Aehnlichkeitspunkte zweier andern Kreise nothwendig über oder unter den Punkt auf aC fallen.

So liegt z. B. der äußere Aehnlichkeitspunkt von M und m in A, dagegen der von m und μ in α.

Da jede Gerade, die von dem äußern Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise ausgeht, nach 123, äußere Aehnlichkeitslinie dieser Kreise ist; und alle aus den beiden Mittelpunkten nach ihr gezogenen Parallelen, wie mp und MP die nach AP gezogen sind, sich, nach 125, wie die Radien der Kreise verhalten, d. i. wenn r und R diese Radien bezeichnen,

$$\frac{mp}{r} = \frac{MP}{R} \text{ ist:}$$

so hat man auch, für die Aehnlichkeitslinie αp der Kreise m und μ, den Radius des Kreises μ durch ϱ, bezeichnend,

$$\frac{mp}{r} = \frac{\mu\pi}{\varrho}.$$

Zieht man nun die Gerade apP′, so schneidet sie augenscheinlich von den Linien $\mu\pi$, MP die Stücke $\pi\pi'$, PP′ ab, so daß folglich der Quotient $\frac{mp}{r}$ größer ist, als jeder der beiden Quotienten $\frac{\mu\pi}{\varrho}$ und $\frac{MP'}{R}$.

Daraus folgt, daß der, dem Kreise m zugehörige Quotient ein Maximum ist, in Bezug auf alle andere gleichartig beschriebene Kreise, wie M, μ, . . .

Eben so ist auf der andern Seite der Geraden aP′ der Kreis m′ der größte; und man kann, wegen der entgegengesetzten Lage gegen gedachte Gerade, den einen dieser Kreise als positives, den andern als negatives Größtes ansehen.

In Bezug auf die Linie ap′, welche die beiden gegebenen Kreise nicht schneidet, sondern den Winkel Aam theilt, ist der Quotient des Kreises m unter allen übrigen der kleinste; und der des Kreises m′ unter allen der größte. Dagegen ist in Bezug auf ap″, welche den Winkel Gam′ theilt, der Quotient von m der größte, der Quotient von m′ aber der kleinste.

Anmerkung. Man findet noch verschiedene Beziehungen der Sätze, welche dieser Aufgabe zum Grunde liegen, in Crelle's Journal der ꝛc. Mathematik, Band I. pag. 161 und 252 in einem Aufsatze von Herrn Steiner, aus welchem die vorstehende Aufgabe genommen ist.

Ob sie zwar eigentlich nicht hier rangirt, so steht sie doch in zu enger Beziehung mit der folgenden Aufgabe, als daß sie von ihr getrennt werden dürfte.

292. Man soll einen Kreis m beschreiben, der zwei gegebene, einander in B berührende Kreise M′ und M″ berührt; und dessen Quotient in Bezug auf die Centrale M′M″, d. h. das Verhältniß seines Radius r zu der aus seinem Mittelpunkte m auf die Axe gefällten Normale mP gleich $\frac{mP}{r}$ q = (unter q eine abstracte Zahl verstanden) gegeben ist. Fig. 359.

Auflösung. Man errichte in der Mitte M der Linie CD, welche die Differenz der Durchmesser beider gegebenen Kreise ist, die zu der Centrale normale Linie MF; nehme Mμ = q . MD = qR (wenn R die Größe des Radius eines Kreises M bezeichnet, welche die gegebenen in der centralen Richtung ungleichartig berührt) und ziehe den Kreis μ durch C und D. Dieser wird die gegebenen Kreise in noch zwei Punkten c und d schneiden und in diesen die Berührungspunkte des gesuchten Kreises bestimmen; der Mittelpunkt m liegt aber in dem Durchschnitt der Richtungen M′c und M″d.

Anmerkung. Die vorstehende Aufgabe ist aus Crelle's Journal ꝛc. entlehnt, wo man sie Band I., pag. 280, u. f., und in dem Vorhergehenden die Sätze entwickelt findet, auf welche sie begründet ist und woraus deren Beweis genommen werden muß. Einige dieser Sätze sind in den geometrischen Lehrsätzen aufgeführt, die dieser Sammlung voranstehen; sie sind so eng verknüpft und so folgereich in ihren Beziehungen, daß aus ihnen eine große Anzahl Aufgaben geschöpft werden kann. Die Elementargeometrie hat jedoch diese Sätze noch nicht allgemein aufgenommen; daher konnten hier nur wenige Aufgaben in dieser Beziehung stehen und eben so wenig deren Beweise gründlich geführt werden.

Wegen der Eleganz ihrer Auflösung mag noch folgende, auf Obiges beziehliche Aufgabe hier stehen:

293. Es sind zwei Kreise M_2 und M_1 gegeben, die einander in B berühren; man soll eine Reihe Kreise M, m, m_1, m_2, ... beschreiben, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise M_1 und M_2 berührt, und welche einander in ih-

rer Folge berühren, und zwar daß der erste (M) dieser Kreise auf der Centrale $M_1 M_2$ liege.

Fig. 360. Auflösung. Man beschreibe den Kreis M, dessen Radius MD gleich der Centrale $M_1 M_2$ ist; errichte auf letzterer die Normale MG in dem Mittelpunkt des Kreises M, mache $\mu\mu_1 = \mu_1\mu_2 = \mu_2\mu_3 \ldots\ldots = M\mu = MD$ und nehme die Punkte μ, μ_1, $\mu_2 \ldots$ als Mittelpunkte von Kreisen, welche durch C, D gehen. Der Kreis μ wird die gegebenen Kreise in c, d, der Kreis μ_1 in c_1, d_1, der Kreis μ_2 in c_2, d_2 u. s. w. schneiden und in diesen Punkten die Berührungspunkte der Kreise m, m_1, $m_2 \ldots$ mit den gegebenen Kreisen bestimmen.

Die Mittelpunkte m, m_1, $m_2 \ldots\ldots$ erhält man in den Durchschnitten der Richtungen M_2d und M_1c, M_2d_1 und M_1c_1, ...

Anmerkung. Die Grenze der Operation ergiebt sich bei einem Radius $\mu_x D$, wo $x = \infty$ d. i. wo der Bogen CD mit der Sehne CD und also auch mit CB zusammen fällt.

Zieht man die Tangente DF_4, schneidet sie mit der Secante $M_2\mu$, macht $FF_1 = F_1F_2 \ldots = DF$ und beschreibt aus F, F_1, $F_2 \ldots\ldots$ Kreise, die durch D gehen: so schneiden diese auf dem Kreise M_2 in d, d_1, d_2, ... die Berührungspunkte der gesuchten Kreise, und den Kreis M_2, so wie auch die Kreise m, m_1, m_2, rechtwinklich.

Dasselbe Resultat erhält man in den Durchschnitten einer Tangente in C mit den Richtungen $M_1\mu$, $M_1\mu_1$, ... in Beziehung auf den Kreis M_1 und die Berührungspunkte c, c_1, c_2, u. s. w.

Siebenter Abschnitt.

Aufgaben, Figuren betreffend, welche in oder um Kreise beschrieben sind.

294. In einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Auflösung. Aus dem Endpunkte d eines Durchmessers beschreibe mit dem Radius des Kreises einen Bogen, so sind die Durchschnitte a, b zwei Eckpunkte des gesuchten Dreiecks und der Endpunkt c des Durchmessers der dritte Eckpunkt. Fig. 361.

Beweis. Aus 104, 112.

295. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem andern mno ähnlich ist.

Auflösung. Man ziehe einen Radius ac und in den Endpunkt a eine Tangente gf, trage an diese den Winkel fab = nom, und den Winkel dag = onm. Verbindet man die Durchschnitte b, d, so ist das Dreieck abd ähnlich dem Dreieck mno. Fig. 362.

Beweis. ∟fab + bad + dag = 2 R; also ist der Winkel bad gleich dem Winkel nmo des gegebenen Dreiecks. Nach 90 ist aber ∟fab = bda und ∟dag = dba; also sind die Winkel des construirten Dreiecks gleich den Winkeln des gegebenen und die Dreiecke ähnlich.

296. In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire zwei Winkel des Dreiecks, nehme den Durchschnitt d der Halbirungslinien als Mittelpunkt und eine Normale aus ihm auf eine der Seiten als Radius des Kreises. Fig. 363.

Beweis. Aus 73, 96.

297. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen hik ähnlich ist. Fig. 364.

Auflösung. Ziehe einen Radius op, trage an ihn einen Winkel pon, gleich dem Supplement des Winkels ihk = ihq, und einen andern mop = Suppl. ikh = ikr, ziehe durch die Durchschnittspunkte p, m und n des Kreises Tangenten: so sind diese, gehörig verlängert, die Seiten des verlangten Dreiecks.

Beweis. ∟mcp = 2R — mop
∟nap = 2R — nop;
auch ist ∟ihk = 2R — ihq
∟ikh = 2R — ikr.

Weil aber durch Construction
∟nop = ihq
und ∟mop = ikr,
so ist ∟mcp = ikh
und ∟nap = ihk;
folglich sind die Dreiecke abc und ihk ähnlich und, da die Seiten Tangenten des Kreises sind, so ist das Dreieck um diesen beschrieben.

298. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten oder deren Verlängerungen durch drei gegebene Punkte a, b und c gehen, dessen Spitzen aber in der Peripherie des Kreises liegen.

1. Auflösung. Man lege durch einen der gegebenen Punkte b eine Tangente bo, nach Aufgabe 248, an den Fig. 365, a.

Kreis, ziehe ab und suche zu ab, bo die dritte Proportionale, so daß

$$ba : bo = bo : \begin{cases} x \\ bh \end{cases}$$

werde; diese gefundene Proportionale trage von b nach h.

Durch h lege man eine zweite Tangente hn an den Kreis, ziehe hc und mache hk gleich der dritten Proportionale zu hc und hn. Nun verbinde man den Mittelpunkt l des gegebenen Kreises mit k, mache $\angle klm = lkm = bhc$ und beschreibe aus dem Durchschnittspunkt m der Schenkel, mit dem Radius $mk = ml$ einen Kreis, welcher den gegebenen in g schneiden wird.

Zieht man noch gh, so giebt der Durchschnitt in f einen Eckpunkt des gesuchten Dreiecks; der Durchschnitt der Richtung bf den zweiten in d, und schneidet man zuletzt mit der Richtung cf den gegebenen Kreis in e, so ist dieser der dritte Eckpunkt.

Beweis. Legt man durch d, f und a einen Kreis; zieht, wenn h der Durchschnittspunkt desselben mit ab ist, die Richtung hf bis g, und verbindet ge: so findet man leicht, daß

1) eg parallel ab sein wird.

Denkt man einen andern Kreis durch f, g und c, und k als dessen Durchschnittspunkt mit hc, zieht die Richtung kg bis zum Durchschnitt i des Kreises und verbindet i, e: so findet sich, daß

2) ei parallel kh, und der Winkel gei gleich bhk sein muß.

Werden die Linien lg und lf gedacht, so ergiebt sich, daß

3) $\angle lgk = R + gei = R + bhk$ ist.

Und zieht man noch lk und legt durch l, g und k einen Kreis, dessen Mittelpunkt m ist; so wird sich ergeben, daß

4) $\angle klm = lkm = \frac{1}{2}(2R - lmk) = bhk$ ist.

Die in den Nummern 1 bis 4 abgeleiteten Sätze, welche die Construction begründen, liegen nun auch dem Beweise unter.

Fig. 365, b. Man hat nun

$ob_q = bh \cdot ba$, nach der Constr.

und $ob_q = bf \cdot bd$, nach 94;

also $bh \cdot ba = bf \cdot bd$

oder $bh : bf = bd : ba$.

Daher sind die Dreiecke bhf und bda ähnlich, weil beide noch den Winkel b gemein haben; folglich ist der Winkel $bhf = bda$.

Ferner ist $hn_q = hc \cdot hk$, durch Constr.
und $hn_q = hf \cdot hg$,
folglich auch das Dreieck hfc ähnlich hkg, und der Winkel $hcf = hgk$;
und weil, nach 13, $\angle hce = fei$, und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $\angle hce = hgk$, daher $\angle hcf = fei$ ist, so muß ei parallel hc sein.

Durch Construction ist $\angle lkm = klm = bhc$ daher
aus N. 4. $\angle lkm = 2R - 2 . bhc$
also aus N. 3. $\angle lgk = 2R - (R - bhc) = R + bhc$,
folglich $\angle lgi = lig = 2R - (R + bhc) = R - bhc$
und $\angle gli = 2R - 2(R - bhc) = 2 . bhc$
daher $\angle gei = bhc$.
Es ist aber ei parallel hc, also auch eg parallel ab, und deshalb $\angle egf = bhf$.

Da bereits oben gefunden, daß der Winkel bhf gleich ist bda, so ist auch $\angle egf = bda$; und da, nach 80, $\angle egf = edb$; so folgt, daß $\angle bda = ebd$, und daß die Schenkel da und de in einander fallen.

Aus dem Allen geht nun hervor, daß der Punkt a in die Verlängerung der Seite de fällt; und aus der Construction unmittelbar, daß b in der Richtung df und c in der Richtung ef liegt.

Anmerkung. Die Auflösung dieser Aufgabe fand der Neapolitaner Ottojano. Sie ist in dieser Form ausgeführter in „Lehmus Geometrie, Band I, pag. 202, Auflage 1826" nachzulesen. Man kann sie allgemeiner auch auf necke anwenden, wobei sie eine Menge interessanter Beziehungen darbietet.

299. Zieht man in der Ebene eines Kreises eine beliebige Gerade ab und auf sie eine Normale cd aus dem Mittelpunkt des Kreises, sucht zu cd und dem Radius bc Fig. 366.
die dritte Proportionale, trägt diese (ce) von dem Mittelpunkt aus nach e: so ist der Punkt e der zu ab gehörige Pol. Die Gerade selbst aber ist die zu dem Punkt e gehörige Polare.

300. 2. Auflösung der Aufgabe 298. Es seien die Punkte a, b und c gegeben und der Kreis vom Radius dm, so betrachte man jene Punkte als Pole und suche Fig. 367.
zu jedem die ihm für den Kreis d zukommende Polare.

Man suche nemlich zu dem Abstand eines jeden der gegebenen Punkte vom Mittelpunkt, und zum Radius r des Kreises die dritte Proportionale, so daß z. B.

$$ad : r = r : \begin{cases} x \\ da'. \end{cases}$$

werde. Diese x trage man von dem Mittelpunkt aus in da′, ziehe die Polare ee′ normal ad durch a′, und verfahre mit den beiden andern gegebenen auf gleiche Weise.

Hierauf verlängere man diese drei Polaren ee′, ff′ und gg′ bis zu ihren Durchschnitten α, β und γ, verbinde jeden der gegebenen Punkte mit der Spitze des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, die seiner Polare gegenliegt; und die auf den Polaren erhaltenen Durchschnittspunkte a″, b″ und c″ wieder unter sich, bis zu den gegenseitigen Durchschnitten der Peripherie m, n, m′, n′, m″ und n″ verlängert: so sind diese sechs genannten Durchschnittspunkte die Spitzen zweier Dreiecke, nemlich mm′m″ und nn′n″, deren Seiten einzeln, gehörig verlängert, durch die gegebenen Punkte gehen.

301. Es ist ein, für den Kreis d den Ecken nach centrisches Dreieck mm′m″ gegeben; man soll für diesen Kreis ein, den Seiten nach centrisches, Dreieck beschreiben, welches eine solche Lage hat, daß dessen Spitzen auf den Verlängerungen der Seiten von ersterm liegen.

Fig. 368. Auflösung. Ziehe aus dem Mittelpunkt d Normalen auf die Seiten des Dreiecks und verlängere sie über den Kreis hinaus. Betrachte die Dreiecksseiten als Polaren und suche, nach Aufgabe 297, die ihnen für den umschriebenen Kreis zukommenden Pole a, b und c, (man setze nemlich do : r = r : da u. s. w.).

Diese Pole verbinde mit den gegenliegenden Spitzen des Dreiecks, nemlich a mit m′, b mit m und c mit m″, wodurch die Polaren in a′, b′ und c′ geschnitten werden. Durch diese Durchschnitte ziehe man die Richtungen b′a′, a′c′ und c′b′, bis sie den Kreis in α, β, γ oder auch in α', β', γ' schneiden: so geben die beiden Ternionen von Durchschnittspunkten die Berührungen für zwei umschriebene Dreiecke ABC und A′B′C′, welche den Bedingungen entsprechen.

Anmerkung. Durch gleichartige Construction läßt sich das eingeschriebene Dreieck finden, wenn das umschriebene gegeben ist; und man sieht, daß die Aufgabe 301 und deren Umkehrung nur specielle Fälle der allgemeinern 298 sind.

Der Beweis läßt sich daher synthetisch ähnlich dem jener Aufgabe führen. Analytisch findet man ihn in Crelle's Journal rc. Band IV, pag. 391 entwickelt.

Will man ihn in Bezug auf die Eigenschaften der Polaren führen, so kann hier nur auf die Sätze hingewiesen werden, welche in „van Swinden's Elemente der Geometrie, übersetzt von Jacobi, pag. 241 u. f.“ zusammen ge-

stellt sind, oder man lese darüber, Poncelet, Mémoire ꝛc. in Crelle's Journal, Band IV, pag. 1. u. f. Hierher gehört auch folgende Aufgabe.

302. Es ist ein Kreis und die Lage dreier Geraden gegeben, man soll um den Kreis ein Dreieck beschreiben, so daß dessen Spitzen auf jene Geraden fallen.

Auflösung. Man verlängere die Geraden bis zu ihren Durchschnittspunkten h, i, k, fälle aus dem Mittelpunkt d des Kreises auf diese Richtungen Normalen dx, dy, dz und suche zu letztern und zu dem Radius die dritten Proportionalen, d. i. man suche zu den Richtungen, als Polaren, die ihnen für den Kreis zukommenden Pole u, w und v. Es ist nemlich Fig. 369.

$$dy : rad = rad : dw,$$
$$dz : r = r : dv$$
und
$$dx : r = r : du.$$

Verbinde mit diesen gefundenen Polen diejenige Ecke des Dreiecks ihk, welche ihren Polaren gegenliegt, also u mit i, w mit k und v mit h; verlängere diese Transversalen bis zu den gegenliegenden Seiten (oder Polaren) nemlich kw nach c, iu nach a, hv nach b und verbinde die Fußpunkte mit einander: so ergeben sich sechs Durchschnittspunkte des Kreises e', f', g', h', i' und k' als Berührungen zweier Dreiecke a'b'c' und auch a''b''c'', welche die Bedingungen erfüllen.

303. Man soll in einen gegebenen Kreis o ein Quadrat beschreiben.

Auflösung. Die Endpunkte zweier normalen Durchmesser geben die Ecken m, n, p, q des gesuchten Quadrats. Fig. 370.

Beweis. Aus 103.

304. Man soll um ein gegebenes Quadrat einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen, oder verbinde die Halbirungspunkte der Gegenseiten, in beiden Fällen giebt der Durchschnitt den Mittelpunkt des Kreises und die halbe Diagonale dessen Radius.

Beweis. Aus 37, 76.

305. In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Der Durchschnitt der Diagonalen ist der Mittelpunkt, und eine Normale auf die Seite ist der Radius des eingeschriebenen Kreises.

Beweis. Leicht.

306. Um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe zwei normale Durchmesser und lege durch deren Endpunkte Tangenten.

Beweis. Leicht.

307. Um ein gegebenes Viereck, (dessen gegenliegende Winkel paarweise sich zu zwei rechten ergänzen) einen Kreis zu beschreiben.

Fig. 371. Auflösung. Ziehe eine Diagonale pm und durch deren Mitte eine Normale st. Eine dergleichen errichte auch in der Mitte von einer Seite pn, so ist der Durchschnitt q der Mittelpunkt und pq = qn ... ein Radius des gesuchten Kreises.

Beweis. Aus 83, 105.

Anmerkung. Diese Construction nimmt zwar nur Bezug auf das Dreieck pmn; jedoch wird der Kreis immer auch den vierten Punkt o aufnehmen, weil durch die genannten drei Punkte nur ein Kreis gelegt werden kann, dieser also mit dem zusammenfallen muß, welcher, nach der Bedingung ($\alpha + \beta = 2R$) der Aufgabe, durch alle vier Punkte zu legen möglich wird.

Man weiß, daß die Aufgabe unmöglich wird, wenn jene Bedingung fehlt.

309. Es sind die vier Seiten eines Vierecks einzeln gleich m, n, o und p gegeben; man soll das Viereck so zeichnen, daß es den Ecken nach centrisch wird.

Fig. 372. Auflösung. Man trage auf eine Richtung ag die gegebene Seite o in ae, suche zu den übrigen m, n und p die vierte Proportionale und trage sie in ec. Nun theile man ac nach Aufgabe 28 so, daß ab : bc = m : n wird; suche nach Aufgabe 64 den geometrischen Ort eines Punktes d, an welchem der Winkel adb gleich bdc ist. Diesen, in dem Bogen bh gefundenen, schneide man aus e mit einem Radius, gleich p, wodurch sich eine dritte Ecke d ergiebt, so daß sich nun das Viereck, mit den Seiten df = n und af = m, leicht ergänzen läßt.

Beweis. Da durch Constr. m : n = p : ec,
d. i. af : df = de : ec,
so ist das Dreieck afd ähnlich dec, und $\angle$dec = afd.

Daher ist der Winkel dfa das Supplement von cba und das Viereck muß, nach 105, den Ecken nach centrisch sein.

Die drei Seiten af, fd und de sind den gegebenen Linien m, n, p gleich gemacht: daher sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

310. Um einen gegebenen Kreis m ein Viereck zu con-

struiren, welches zugleich den Ecken und Seiten nach centrisch ist.

1. Auflösung. Man ziehe zwei beliebige Sehnen ab, cd normal und lege durch ihre Endpunkte Tangenten: so sind diese, gehörig verlängert, die Seiten des verlangten Vierecks. Fig. 373.

Beweis. Weil die Winkel mdq und mbq gleich R sind, so ist $\alpha + \varepsilon = 2\,R$, nach 34, und eben so $\beta + \delta = 2\,R$; daher $\alpha + \beta + \delta + \varepsilon = 4\,R$. Nun ist aber, nach 85, $\alpha + \beta = 2\,R$, folglich auch $\delta + \varepsilon = 2\,R$.

Deshalb ist das, den Seiten nach centrisch gebildete, Viereck opqn auch den Ecken nach centrisch. Der Kreis, welcher durch die Ecken geht, hat, wie leicht zu erachten, einen von dem gegebenen Kreis verschiedenen Mittelpunkt, der, nach Aufgabe 307, zu suchen ist.

2. Auflösung. Man beschreibe beliebig in den Kreis ein Viereck onmp, fälle aus dem Mittelpunkt auf die Seiten Normalen und lege durch deren Durchschnittspunkte mit der Peripherie die Tangenten tu, ur, rs und st als Seiten des gesuchten Vierecks. Fig. 374.

Beweis. Leicht.

311. Um einen Kreis, dessen Radius, gleich r, gegeben ist, ein Viereck zu construiren, welches den Ecken und Seiten nach centrisch ist.

1. Auflösung. Man beschreibe einen beliebigen Kreis, und um diesen nach Aufgabe 310 ein Viereck a'b'c'd', welches den Ecken und Seiten nach centrisch ist; suche nach Aufgabe 309 den Mittelpunkt m des Kreises, der durch die Ecken geht, ziehe aus diesem Mittelpunkte Radien durch die Ecken und schneide auf den Radien aus m die Ecken des verlangten Vierecks mittelst eines Kreises vom Radius r. Fig. 375.

Beweis. Da $ma' = mb'$, und auch $ma = mb$, so ist $ma' : ma = mb' : mb$ daher ab parallel a'b'.

Dasselbe gilt auch für die übrigen Seiten.

Setzt man den Radius des innern Kreises $= \varrho$, so ist

$$ab : a'b' = r : \varrho$$

d. i. $ab \,.\, \varrho = a'b' \,.\, r$

und $bc \,.\, \varrho = b'c' \,.\, r$

$cd \,.\, \varrho = c'd' \,.\, r$

und $da \,.\, \varrho = d'a' \,.\, r$

daher $$\frac{(ab + bc)\,\varrho}{(cd + ad)\,\varrho} = \frac{(a'b' + b'c')\,r}{(c'd' + d'a')\,r}$$

oder $\frac{ab + bc}{cd + ad} = \frac{a'b' + b'c'}{c'd' + d'a'}$.

Nach 106 ist $\frac{a'b' + b'c'}{c'd' + d'a'} = 1$,

folglich ist auch $\frac{ab + bc}{cd + ad} = 1$

und daher das Viereck abcd den Seiten nach centrisch. Da auch die Winkel des äußern Vierecks gleich den Winkeln des Hülfsvierecks sind, dieses aber den Ecken nach centrisch ist; so ist solches auch bei dem äußern Viereck der Fall.

2. Auflösung. Man nehme auf der Peripherie eines Kreises vom Radius r drei beliebige Punkte a, b und c, verbinde sie zu einem Dreieck und construire auf ac nach Aufgabe 155 ein Dreieck acd, worin der Winkel d = 2 R — ∟abc und die Differenz der Seiten, die ihn bilden, gleich ab — bc ist. Man erhält dadurch das verlangte Viereck abcd.

Beweis. ∟cda = 2 R — abc, durch Constr. also die Summe der Winkel abc + cda = 2 R.

Daher ist das Viereck den Ecken nach centrisch.

Die Differenz der Seiten ab — bc = ad — cd; also ist ab + cd = ad + bc. Folglich ist das Viereck auch den Seiten nach centrisch.

312. Ein Viereck zu zeichnen, welches zugleich den Ecken und Seiten nach centrisch ist; wenn eine Seite ad und die anliegenden Winkel bad und cda gegeben sind.

Fig. 376. Auflösung. Man lege an ad die gegebenen Winkel bad und cda und halbire sie, so ist der Durchschnitt f der Mittelpunkt eines eingeschriebenen Kreises vom Radius gf = kf.

Man beschreibe diesen Kreis, lege in einen beliebigen Punkt des Schenkels dm einen Winkel α, gleich dem Supplement ∟bad und ziehe mit dessen Schenkel op parallel eine Tangente cb an den Kreis f, so schließt diese das verlangte Viereck abcd.

Beweis. Da af den Winkel bad halbirt, so liegt, nach 96, auf af der Mittelpunkt eines Kreises, wovon ba und ad Tangenten sind. Weil aber die Tangente ad gemeinschaftlicher Schenkel der Winkel bad und adc ist, so ist f der Mittelpunkt des Kreises an den ab, ad und auch cd Tangenten sind. Die vierte Seite ist aber Tangente durch Construction.

Nun ist aber zugleich die Summe der Winkel $\alpha +$ bad, gleich 2 R; folglich ist das Viereck auch den Ecken nach centrisch.

313. Ein reguläres Fünfeck in einen Kreis zu zeichnen.

1. Auflösung. Man beschreibe nach Aufgabe 111. ein gleichschenkliches Dreieck nmo, Fig. 377, a, worin der Winkel nmo $= \frac{1}{2}$ mno ist; nehme dann Fig. 377, b auf der Peripherie einen beliebigen Punkt b als Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks bde an, und mache dieses ähnlich dem Dreieck mno; halbire die Bogen dcb und eab in a und c und verbinde zuletzt die Eckpunkte a, b, c, d und e. Fig. 377, a, b.

Beweis. Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ ist gleich 2 R; also ist

$$\llcorner cea = ade = abe = cbd = \tfrac{2}{5} R$$

und $\llcorner cde = acd = bae \ldots = 3 \cdot \frac{2}{5} R = \frac{6}{5} R.$

Da nun, nach 102, der Peripheriewinkel eines regulären necks $= 2 \cdot \dfrac{n-2}{n} \cdot R$ ist, so ist jeder der genannten Winkel ein Peripheriewinkel des Fünfecks, nemlich $= \frac{6}{5}$ R.

2. Auflösung. Man ziehe beliebig einen Durchmesser ab und in dem Mittelpunkt eine Normale ch, halbire bc in d, ziehe dh und beschreibe aus d mit dem Radius dh einen Bogen hm, einen zweiten aber aus h mit dem Radius hm. Dieser schneidet auf der Peripherie in f und g zwei Eckpunkte, so daß durch Uebertragen der Sehne hg in gi und fk das Fünfeck ergänzt werden kann. Fig. 378.

Beweis. Es ist nach 53

$$bm_q + cm_q = 2\,(cd_q + dm_q);$$

durch zweckmäßige Entwickelung ergiebt sich hieraus

$$bm \cdot cm + cd_q = dm_q = dh_q;$$

nach 47 ist $dh_q = hc_q + cd_q,$

also $bm \cdot cm = hc_q = bc_q,$

daher $bm : bc = bc : cm$

und $bm - bc : bc = bc - cm : cm$

d. i. $cm : bc = \left\{\begin{matrix} ac - cm \\ am \end{matrix}\right\} : cm,$

oder $bc : cm = cm : am.$

Mithin ist der Radius ac = bc nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt und, nach 109, cm die Seite des regulären Zehnecks im Kreise c.

Es ist aber auch

$$cm_q + ch_q = hm_q$$

folglich ist, nach 110, hm die Seite eines regulären Fünfecks im genannten Kreise.

314. Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Fünfeck zu beschreiben.

Fig. 379. 1. Auflösung. Man beschreibe nach voriger Aufgabe ein Fünfeck abcde in den Kreis und ziehe durch dessen Ecken Tangenten. Diese bilden, gehörig verlängert, die Seiten des verlangten Fünfecks.

Beweis. Leicht.

2. Auflösung. Man construire ein eingeschriebenes Fünfeck, ziehe durch die Ecken verlängerte Radien und mache sie gleich der vierten Proportionale c'n, nemlich gn : kn = cn : c'n.

Beweis. Leicht.

315. In einen gegebenen Kreis ein reguläres Sechseck zu zeichnen.

Auflösung. Man bilde mit dem Radius ein gleichseitiges Dreieck und trage dessen Seite als Sehne auf der Peripherie herum.

Beweis. Aus 104.

316. In einen Kreis ein reguläres Zehneck zu zeichnen.

Fig. 380. 1. Auflösung. Schneide den Radius nach dem äußern und mittlern Verhältniß in f, mache die Sehne ab gleich dem größern der erhaltenen Theile cf, so ist diese die Seite des Zehnecks im Kreise.

Beweis. Durch die Construction hat man ein gleichschenkliches Dreieck abc erhalten, worin die Winkel an ab doppelt so groß sind als der Winkel an der Spitze; daher ist

$$\llcorner bca + cab + bca = 2R,$$

also $$2bca + 2bca + bca = 5bca = 2R$$

und $$\llcorner bca = \tfrac{2}{5}R.$$

Nach 103 ist aber $\frac{2}{5}R$ der Mittelpunktswinkel eines Zehnecks, daher ist dessen gegenliegenden Sehne die Seite des Zehnecks.

2. Auflösung. Verfährt man nach Aufgabe 313, Auflösung 2, so erhält man in cm die gesuchte Seite des Zehnecks.

317. Mittelst ursprünglich in den Kreis geschriebene n ecke, andere m ecke in selbigen zu zeichnen.

Durch rein geometrische Construction kann man als Urvielecke nur Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Zehnecke zeichnen; aus diesen aber durch zweierlei Verfahren viel andere ableiten.

Das eine Verfahren ist, daß man wiederholend die Bogen halbirt, welche den Mittelpunktswinkeln eines n ecks

zugehören und dadurch die Sehnen erhält, welche Seiten des 2 . necks sind.

Durch diese Operation lassen sich folgende Vielecke ableiten:

1) aus dem Dreieck das Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck . . . ., allgemein ein regelmäßiges Vieleck von 3 . 2^n Seiten;

2) aus dem Viereck, das Achteck (durch Trisection, die nur hier zulässig ist, das Zwölfeck), das Sechszehneck, Zweiunddreißigeck . . . ., allgemein ein regelmäßiges Vieleck von 2^n Seiten;

3) aus dem Fünfeck, das Zehneck, Zwanzigeck, Vierzigeck, Achtzigeck . . . ., allgemein ein regelmäßiges Vieleck von 5 . 2^n Seiten.

Die übrigen Urvielecke geben nur solche, die unter obigen schon aufgezählt sind.

Das zweite Verfahren besteht darin, daß man zwei jener Urvielecke zugleich in den Kreis beschreibt. Dazu sind immer zwei solche von N und n Seiten zu wählen, daß die Differenz N — n immer gleich 2 oder 2^n sei. Man kann also ein Dreieck und ein Fünfeck zugleich in einen Kreis zeichnen, um den zur Seite (Sehne) eines Funfzehnecks gehörigen Bogen zu finden; eben so würde man mittelst eines Sechsecks und Zehnecks den Bogen zur Sehne, als Seite, eines Sechzigecks erhalten.

Wären z. B. ad und de Seiten eines regulären Sechsecks, und ab, bf solche eines Achtecks, die beide einen Eckpunkt a gemein haben, so faßt die Differenz der Bogen ad — ab immer N — n, hier 8 — 6 solcher Theile in sich, Fig. 381.
von denen jeder $\frac{1}{N\,.\,n}$ $(= \frac{1}{48})$ der ganzen Peripherie ist; und das Auffinden der Einheiten, welche in der Differenz N — n, also hier 8 — 6, liegen, ist nur noch auf die einfache Operation des Halbirens angewiesen.

Es würde also hier bg = gd der Bogen sein, dessen zugehörige Sehne die Seite eines Achtundvierzigecks für den gegebenen Kreis wäre.

Es ist nemlich der Winkel dca, als Mittelpunktswinkel eines Sechsecks, gleich $\frac{4\,R}{6} = 60°$, der Winkel bca, als Mittelpunktswinkel eines Achtecks, gleich $\frac{4\,R}{8} = 45°$; daher $\llcorner$dcb = 60 — 45 = 15° und der Winkel am Mittelpunkt des Vierundzwanzigecks, folglich ist

$$\llcorner bcg = \tfrac{1}{2}\, dcb = \frac{15^\circ}{2} = 7^\circ\, 30'$$

d. i. der dem Achtundvierzigeck zukommende Winkel.

1. Anmerkung. Auf vorstehende Ableitungsweise gründet sich die Einrichtung der sogenannten Nonius oder Vernier bei Winkelmeßinstrumenten.

2. Anmerkung. Die Construction der regulären Vielecke durch rein geometrisches Verfahren hat Gauss einer besondern Untersuchung unterworfen und als Resultat gefunden, daß ein jedes n eck in den Kreis zu beschreiben möglich sei, wenn n eine Primzahl von der Form $2^m + 1$ oder eine solche Zahl ist, deren ungerade Factoren einzeln die Form $2^m + 1$ haben und wobei keiner mehr als einmal vorkommt. Daher würde ein 257eck zu construiren sein, weil $257 = 2^8 + 1$ ist; und ein 255eck weil $255 = (2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)$ ist.

Solche necke sind, nach Gauss, folgende, wo

n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16,
17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60,
64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160,
170, 192, 204, 255, 256, 257, 272 . . . . .

2. Anmerkung. Viele der Constructionen sind so verwickelt und umständlich, daß sie analytisch zwar begründet, durch Construction aber praktisch unausführbar sind. Dagegen gewähren andere, wobei es entweder auf streng geometrische Construction nicht ankommt, oder nur eine Annäherung gewünscht wird, zuweilen praktischen Nutzen. Dergleichen Auflösungen sind die mittelst des Transporteurs, des Proportionalzirkels, des tausendtheiligen Maasstabes und annäherungsweise durch Construction. Von diesen folgen einige in nachstehenden Aufgaben.

318. Eine allgemeine auf necke im Kreise beziehliche Construction ist folgende:

Fig. 382. Man beschreibe über dem Durchmesser ab ein gleichseitiges Dreieck abf, verlängere den Durchmesser um be = ab und theile die ganze Länge ae in n gleiche Theile; mache $bd = \frac{1}{n} \cdot 2\,ab = \frac{ae}{n}$, ziehe die Richtung fd nach k und noch bk. Diese Sehne giebt die Seite des necks.

Die trigonometrisch zu führende Untersuchung, welche zugleich als Beweis gelten kann, giebt folgende Resultate, wenn α den Mittelpunktswinkel des necks bezeichnet:

$$\cos . \alpha = \frac{2(n-4)}{3n - \sqrt{n^2 + 16n - 32}}.$$

Setzt man in diese Formel nach einander die Werthe

$n = 3;\ n = 4;\ n = 5;\ \ldots\ldots$

so ergiebt sich für

$n = 3$, $\alpha = 120°$ also genau der Mittelpunktswinkel des Dreiecks, $\frac{4R}{3}$;

$n = 4$, $\alpha = 90°$, der Mittpunktswinkel des Quadrats;

$n = 5$, $\alpha = 71°57'20''$, mithin ein Winkel, der um $0°2'40''$ kleiner ist als $\frac{4R}{5}$;

$n = 10$, $\alpha = 36°21'21''$, welcher Winkel um $0°21'21''$ zu groß ist;

$n = 17$, $\alpha = 21°47'47''$, ein Winkel, der um $0°37'13''\ldots$ zu groß ist

und so wird die Differenz immer zunehmen, je größer man n setzt.

319. Eine andere solche Construction ist folgende: man theile den Kreis durch zwei normale Durchmesser und, wenn das verlangte Vieleck n Seiten haben soll, einen der Viertelkreise in n gleiche Theile; so ist die gesuchte Seite immer gleich der Sehne von vier solchen Theilen.

Soll z. B. n gleich 9 sein, so ist $\frac{1}{9}$ des Viertelkreises der Bogen, der einem Mittelpunktswinkel von 10° zukommt, und $4 . \frac{1}{9}$ der Bogen eines Mittelpunktswinkels von 40°, welcher mit dem wahren Mittelpunktswinkel $\frac{4R}{9}$ übereinstimmt.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß diese Construction nur eine vereinfachte Theilung der ganzen Peripherie ist, immer richtige Resultate gewähren wird, aber nur in einzelnen Fällen streng geometrisch ausgeführt werden kann. Sie ist jedenfalls praktisch bequem.

320. Außer solcher Constructionen wo n beliebig genommen werden kann, hat man sich häufig bemüht, bestimmte Vielecke durch Construction zu zeichnen. Für die meisten sind die Resultate nur annähernd, wie sich aus einigen der nachstehenden ergeben wird. Zuweilen kann man sie beim praktischen Zeichnen benutzen, viele sind aber auch da unbrauchbar, weil die Construction zu verwickelt ist.

a) Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, wenn eine Seite dc gegeben ist.

Auflösung. Mit de beschreibe einen Kreis aus d und einen zweiten mit demselben Radius aus einem beliebigen Punkte c der Peripherie; ziehe die gemeinschaftliche
Fig. 383. Sehne ki und dann einen dritten Kreis mit dem Radius de aus i. Durch f, m und g, m lege man Richtungen, welche die beiden ersten Kreise in b und e schneiden und in diesen Durchschnitten zwei Eckpunkte des Fünfecks bestimmen werden.

Die übrigen Eckpunkte sind die Durchschnitte c, d und a.

Anmerkung. Bei der Untersuchung wird man finden, daß der Peripheriewinkel in c und d um 0°21′48″... zu groß ist, daß also das Fünfeck nicht vollkommen gleiche Winkel haben kann. Zum praktischen Gebrauch ist diese Construction zuweilen ausreichend und dabei bequem.

b) Die Seite eines regulären Siebenecks im Kreise c zu finden.

Auflösung. Aus einem beliebigen Punkte e der Peripherie ziehe man mit dem Radius des Kreises einen Bogen gck, dann die gemeinschaftliche Sehne gk und den
Fig. 384. Radius ec; beschreibe mit gd aus g den Bogen df, so schneidet dieser in gf ein Stück der Peripherie ab, welches annähernd dem Mittelpunktswinkel des Siebenecks zukommt.

Anmerkung. Sucht man mit Hülfe der Trigonometrie den Werth dieses abgeschnittenen Bogens gf in Graden, so findet man ihn 51°19′4″....

Da der wahre, zu $\frac{4R}{7}$ gehörige 51° 25′ 43″... ist, so ist der so construirte um 0°6′39″... zu klein.

c) Man soll die Seite eines regulären Neunecks für den Kreis c construiren.

Auflösung. Man ziehe die normalen Durchmesser
Fig. 385. ad und bm, beschreibe aus b mit dem Radius des Kreises einen Bogen fce, nnd aus m einen dergleichen ahg mit einem Radius am. Die Sehne bg ist annähernd Seite des Neunecks in dem gegebenen Kreise.

Anmerkung. Aus dem Dreieck mbh findet man den Winkel hmg = 27°23′8″. Weil nun

$$bc : gm = \angle hmg : \angle hbc$$

d. i. $$1 : \sqrt{2} = 27°23'8'' : \angle hbc,$$

so wird der zu der Sehne ab gehörige Mittelpunktswinkel für den gegebenen Kreis gleich 39°50′25″ gefunden und

ergiebt sich also um $0^\circ 9' 35''$ zu klein, da der wahre $\frac{4R}{9}$ $= 40^\circ$ ist.

d) Es soll die Seite eines regulären Eilfecks in dem gegebenen Kreise n gefunden werden.

Auflösung. Nachdem man zwei normale Durchmesser gezogen hat, beschreibe man aus a mit dem Radius des Kreises einen Bogen hne, verbinde e, h und ziehe aus h mit dem Radius hn den Bogen ni. Zieht man noch ig, so ist das Stück gf annähernd die Seite des Eilfecks. Fig. 386.

Anmerkung. Es ist mg . gi = ag . bg oder weil mg = gf ist, und wenn r den Radius des gegebenen Kreises bezeichnet,

$$ag = \tfrac{1}{2} r;\ bg = \tfrac{3}{2} r$$

$$gf \,.\, gi = \frac{3r^2}{4}.$$

Daher

$$gf = \frac{3r^2}{4 \,.\, gi}.$$

In dem Dreieck gbi findet man, weil bi = r, bg $= \frac{3r}{2}$ und der Winkel ibg $= \frac{2R}{3}$ ist,

$$ig = \sqrt{7} = 2,645\ldots$$

und dadurch gf $= \frac{3r^2}{4 \,.\, ig} = 0,6348\ldots$, für den Radius = 1.

Die Berechnung der wirklichen Seite giebt das Resultat 0,5669 . . .; daher ist die, durch obige Construction gefundene, um 0,0679 . . . zu groß.

321. Den Radius des Kreises zu finden, in welchen ein Vieleck eingeschrieben werden kann, dessen Seitenzahl gleich n und die Größe der Seite gleich q gegeben sind. Fig. 387

Auflösung. Ueber ab = q beschreibe man ein gleichseitiges Dreieck abc, ziehe durch c eine normale Richtung c″d und mache cc′ gleich q.

Die Linie cc′ ist der Radius für die Seite ab, wenn n gleich 6 ist; bc′ der Radius für das bezichliche Zwölfeck von der Seite ab.

Nimmt man c′c″ gleich ac′, so ist ac″ der Radius für das Vierundzwanzigeck: und so erhält man durch weitere Verfolgung dieser Construction immer einen Radius für ein $3 \,.\, 2^n$ eck für die Größe q einer Seite, und zwar mit geometrischer Schärfe.

Beweis. Aus 88 u. a.

322. Theilt man cc' in sechs gleiche Theile, so sind die Theilpunkte Mittelpunkte für das eingeschriebene 7, 8, 9, 10 und 11 eck. Und theilt man auch $c'c''$ in zwölf gleiche Theile, so ist jeder ein Mittelpunkt der Vielecke zwischen den Seitenzahlen $n = 12$ und $n = 24$: so daß z. B. 3 der Mittelpunkt eines 15ecks, 9 der Mittelpunkt eines 21ecks u. s. w. sein würde, immer in Bezug auf die Größe q der Seite.

Man könnte leicht die Reihe dieser Vielecke fortsetzen für $n > 24$.

Beweis. Nach obigem gehört der Punkt m als Mittelpunkt einem Funfzehneck an, dessen wahrer Mittelpunktswinkel $\frac{4R}{15} = 24°$ sein müßte.

Setzt man $ab = 1$, $ad = \frac{1}{2}$, $cm = \frac{3}{2}$;
so ist $cd = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $dm = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2{,}366025....$
Weil nun

$$ad : dm = 0,5 : 2,366 \ldots$$
$$= 1 : 4,73205 \ldots$$
$$= \frac{1}{\operatorname{cotg} . \angle amd}$$

so ergiebt sich für den Winkel amd der Werth

$$11°56'31''$$

und für den ganzen Mittelpunktswinkel

$$23°53'2''.$$

Die Differenz des gefundenen und des wahren Mittelpunktswinkels ist sonach $0°6'58''$.

Bei dem Achtzehneck wird man die Differenz $0°11'$ finden, und je größer man n nimmt, je bedeutender wird sich die Differenz ergeben.

Fig. 388. 323. Mit Hülfe des Transporteurs, zu dem man beim Zeichnen meistens Zuflucht nimmt, wird obige Aufgabe dergestalt gelöst, daß man an die Endpunkte der gegebenen Seite ab den halben zukommenden Peripheriewinkel, gleich $\frac{n-2}{n} . R$ trägt und den Durchschnitt c der Schenkel als Mittelpunkt nimmt.

Fig. 389. Oder, man errichtet in der Mitte h der gegebenen Seite ik eine Normale, trägt in einen beliebigen Punkt f derselben den halben Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{1}{2} . \frac{4R}{n}$ und zieht mit dessen Schenkel fg die Parallele mk durch einen Endpunkt k der gegebenen Seite.

Achter Abschnitt.

Aufgaben, die Construction von Figuren in Bezug auf ihr Flächenverhältniß betreffend.

324. Eine gegebene Linie ab so zu theilen, daß das Rechteck aus den beiden Stücken einem gegebenen Quadrate von der Seite m gleich sei.

Auflösung. Man beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte auf dem Durchmesser beliebig eine Normale bf = m und ziehe fg parallel ab. Aus einem der Durchschnittspunkte e oder g fälle dann eine Normale ed, so ist d der verlangte Theilpunkt. Fig. 390.

Beweis. Denkt man a und b mit e verbunden, so ist, noch 89, der Winkel aeb gleich R. Dann ist, nach 61,

$$ad : de = de : db$$

oder, weil

$$de = bf = m$$

$$ad : m = m : bd,$$

folglich

$$ad \cdot bd = m_q.$$

325. Eine gegebene Linie bc so zu verlängern, daß das Rechteck aus der ganzen verlängerten Linie ac und ihrer Verlängerung ab gleich dem Quadrate sei, welches eine gegebene Linie n zur Seite hat.

Auflösung. Beschreibe über der gegebenen bc einen Halbkreis, ziehe die Tangente bf, mache diese gleich n und verbinde f mit dem Mittelpunkte d. In den Durchschnittspunkt e lege eine zweite Tangente eg, so schneidet diese die gesuchte Verlängerung von bc in a ab. Fig. 391.

Beweis. In den congruenten Dreiecken aed und dbf ist

$$ae = bf = n.$$

Nach 94 ist $ab \cdot ac = ae_q = bf_q$,

d. i. $ab \cdot ac = n_q$.

326. Eine gegebene Linie q in zwei solche Theile zu theilen, daß das Rechteck aus dem einen Theile am und einer andern gegebenen Linie n gleich sei dem Quadrate aus dem andern Theile mc.

Auflösung. Man trage auf eine Gerade die Summe der beiden gegebenen Linien in ac + cb, beschreibe über ab einen Halbkreis und einen dergleichen über bc, ziehe in c die Tangente cd und verbinde den Durchschnitt d mit dem Mittelpunkte o. Fig. 392.

Wo die Linie do den einen Kreis in n schneidet, ziehe man die Tangente nm, so bestimmt diese in m den Theilpunkt der bedingungsgleichen Stücke am und me.

Beweis. Da das Dreieck ocd congruent ist dem Dreieck onm, so ist cd = nm und man hat

$$cd_q = bc \,.\, ac$$

und $mn_q = bm \,.\, cm,$

folglich $bc \,.\, ac = bm \,.\, cm$

und auch $bc \,.\, ac - bc \,.\, cm = bm \,.\, cm - bc \,.\, cm$

d. i. $bc \,.\, (ac - cm) = cm\,(bm - bc)$

oder $bc \,.\, am = cm \,.\, cm,$

also $n \,.\, am = cm_q.$

327. Man soll zwei Linien finden, deren Quadratsumme einem gegebenen Quadrat von der Seite mn, und das von ihnen gebildete Rechteck dem gegebenen abcd gleich sei.

Fig. 393. Auflösung. Suche zu mn, ac und ab die vierte Proportionale, beschreibe über mn einen Halbkreis, ziehe eine Normale mp, gleich der gefundenen Proportionale, und dann pk parallel mn. Den Durchschnitt o verbinde mit m und n, so sind om und on die gesuchten Linien.

Beweis. Da das Dreieck mno rechtwinklich ist, so hat man

$$mn_q = mo_q + no_q$$

wie eines Theils verlangt worden ist.

Es ist ferner

$$mn : ac = ab : mp$$

also $mn \,.\, mp = ac \,.\, ab;$

weil aber das Rechteck

$$mn \,.\, mp = om \,.\, on, \text{ nach } 36,$$

so ist auch $om \,.\, on = ac \,.\, ab.$

328. Durch einen gegebenen Punkt p innerhalb einer Winkelebene db′c eine Richtung zu legen, die ein Dreieck abschneidet, welches gleich einem gegebenen Parallelogramm bhkg ist.

Fig. 394, a, b. Auflösung. Man verwandle, nach Aufgabe 359, das gegebene Parallelogramm in ein inhaltgleiches hb″g″k″, welches den Winkel db′c und zur Höhe den Abstand des Punktes p von b′c = pq hat; trage dieses gefundene Parallelogramm in b′g′h′k′, errichte in k′ eine Normale k′n = g′p, schneide mit einem Radius gleich ph′ aus n den Schenkel b′c in c, und ziehe die Richtung cp, bis sie den andern Schenkel in a schneidet; so ist ab′c das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da die Dreiecke $k'mc$ und $g'ap$ ähnlich sind, so hat man, nach 68,

$$\triangle k'mc : g'ap = k'c_q : g'p_q = k'c_q : k'n_q.$$

$$\text{Daher } k'mc + g'ap : g'ap = k'c_q + k'n_q : k'n_q$$
$$= cn_q : k'n_q = ph'_q : gp'_q.$$

$$\text{Auch ist } \triangle pmh' : g'ap = ph_q : g'p_q,$$

$$\text{also} \quad k'mc + g'ap = pmh'$$

$$\text{und } k'mc + g'ap + b'g'pmk' = pmh' + b'g'pmk',$$

d. i. das Dreieck $b'ac$ = dem Parallelogramm $b'g'h'k'$ = $bghk$.

329. Zwischen den Schenkeln eines Winkels φ, durch den außerhalb liegenden Punkt e eine Richtung so zu legen, daß das Dreieck, welches sie mit jenen Schenkeln bil- Fig. 395.
det, gleich werde einem Rechteck, gebildet aus dem Abstande des Punktes e von aq und einer gegebenen Linie n.

Auflösung. Man fälle aus e eine Normale ef, ziehe eg parallel ad, trage ag in gh und die gegebene n in ai.

Ueber hi beschreibe man einen Halbkreis, fälle aus a die Normale ar und ziehe aus i mit dem Radius ir einen Bogen br. Die Richtung be schneidet dann in c die Spitze des gesuchten Dreiecks.

Beweis. Die Dreiecke abc und bge sind ähnlich. Bezeichnet man den Inhalt des gegebenen Rechtecks $ef \,.\, n$ durch q, so ist

$$\frac{bg \,.\, ef}{2} : q = bg_q : ab_q$$

$$\text{oder} \quad ef : 2q = bg : ab_q$$

$$\text{und} \quad ef \,.\, ab_q = 2q \,.\, bg,$$

$$\text{oder} \quad (ef \,.\, ab)\, ab = 2q \,.\, bg.$$

Setzt man noch die Höhe $ef = h$ und die $cl = h'$ so hat man

$$ab : h' = bg : h$$

$$\text{oder} \quad ab \,.\, h = bg \,.\, h',$$

$$\text{also} \quad (bg \,.\, h')\, ab = 2q \,.\, bg$$

$$\text{und} \quad ab \,.\, h' = 2q$$

$$\frac{ab \,.\, h'}{2} = q.$$

Folglich ist das Dreieck abc gleich dem Rechteck $ef \,.\, n$.

330. Zwei Linien ab, de sind der Größe und Lage nach, eine dritte mn blos der Lage nach gegeben: man soll auf letzterer den Punkt als gemeinschaftliche Spitze zweier Dreiecke von den Grundlinien ab und de bestimmen, wo- Fig. 396
durch diese Dreiecke gleichflächig werden.

Auflösung. Verlängere beide erstgegebene Linien bis zu ihrem Durchschnitt g, mache gf gleich ab und gh = de, ziehe durch f und h Parallelen mit den gegenseitigen Schenkeln des Winkels age und durch den erhaltenen Durchschnittspunkt k die Richtung gk, bis sie die gegebene Richtung mn in c schneidet.

Diese Richtung ist der geometrische Ort der Spitzen aller bedingten Dreiecke und also der Punkt c der gesuchte: so daß das Dreieck abc inhaltsgleich dem Dreieck dec ist.

Beweis. Man ziehe ch und cf, so wird man den Beweis leicht finden.

331. Drei Linien ab, de, fg sind ihrer Größe und Lage nach gegeben; man soll denjenigen Punkt finden, in
Fig. 397. dem die Spitzen dreier gleichflächigen Dreiecke zusammenstoßen, welche jene Linien zu Grundlinien haben.

Auflösung. Man verfahre, wie bei voriger Aufgabe, indem man den geometrischen Ort mp der Spitzen von den beiden Dreiecken abc und dec, und dann den no von den Spitzen eines andern Paares z. B. von den Dreiecken dec und fgc sucht. Der Durchschnitt von no und mp giebt den gesuchten Punkt.

Beweis. Leicht.

332. Ein Dreieck zu construiren, welches einem gegebenen Dreieck abc inhaltsgleich ist und einen Winkel gleich α hat.

Auflösung. Durch die Spitze c des gegebenen Drei-
Fig. 398. ecks ziehe man mn parallel ab, trage in a den Winkel c′ab = α und ziehe bc′, so ist das Dreieck abc′ gleichflächig dem Dreieck abc.

Beweis. Aus 18, 41.

333. Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebe-
Fig. 399. nen gleichflächig ist, einen Winkel β mit letzterm gemein hat und dessen eine an dem Winkel β liegende Seite gleich einer gegebenen Linie m ist.

Auflösung. Man trage auf ab die gegebene Linie m in af und suche zu af, ab und ac die vierte Proportionale; setze diese von a nach e und ziehe ef. Das Dreieck aef ist das verlangte.

Beweis. Aus 66.

333a. Es ist ein Dreieck abc gegeben, man soll auf
Fig. 470, a, b. ab oder deren Verlängerung eine Normale errichten, welche mit den Richtungen ac und ab ein Dreieck bildet, das dem gegebenen inhaltsgleich ist.

Auflösung. Man fälle aus der Spitze c eine Normale cd auf die Gegenseite oder deren Verlängerung, suche

zu ad und ab die mittlere Proportionale, trage sie in af und errichte in f eine Normale. Das Dreieck afe ist dann inhaltsgleich dem gegebenen Dreieck abc.

Beweis. Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke afe und adc ist

$$af : ef = ad : cd$$

oder $$\frac{af}{ef} = \frac{ad}{cd}.$$

Durch Construction ist aber

$$af_q = ab \cdot ad,$$

daher $$af_q : \frac{af}{ef} = ab \cdot ad : \frac{ad}{cd};$$

d. i. $$af \cdot ef = ab \cdot cd,$$

also ist das Dreieck afe inhaltsgleich dem Dreieck abc.

334. Ueber einer gegebenen Richtung be ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Parallelogramm abcd gleichflächig ist und dessen eine Seite mit jener Richtung einen Winkel φ bildet. Fig. 400.

Auflösung. Man trage eine Seite ab des Parallelogramms zweimal auf die Richtung, (mache nemlich be = 2 . ab,) und in e den Winkel φ. Ziehe dann mit be eine Parallele cf von einem Abstand dg, gleich der Höhe des gegebenen Parallelogramms: so schneidet diese in f die Spitze des gesuchten Dreiecks bef.

Beweis. Aus 44.

335. Ein Dreieck zu zeichnen, welches einer gegebenen Figur gleichflächig ist und einen Winkel φ hat.

Auflösung. Man verwandle, nach Aufgabe 403, 404 oder nach einer der folgenden, zuerst das neck in ein anderes Dreieck und dieses dann, nach Aufgabe 332, in das verlangte mit dem Winkel α.

Anmerkung. Mehrere der in diesem Abschnitt aufgeführten Aufgaben sind ihrem Wesen nach übereinstimmend mit Aufgaben des ersten, andere wieder mit Aufgaben des folgenden Abschnitts. Läßt sich eines Theils die Grenzlinie zwischen diesen Abschnitten nicht scharf ziehen; so kann es andern Theils auch Nutzen haben, wenn der Anfänger Aufgaben verschiedenartig ausgedrückt findet und deren Uebereinstimmung oder Verwandschaft selbst aufzusuchen Veranlassung erhält. Es ist daher nur selten auf solche Fälle aufmerksam gemacht worden.

336. Man soll ein Dreieck zeichnen, welches eine Seite gleich ac und einen Winkel β haben, und einer gegebenen Figur inhaltsgleich sein soll.

Auflösung. Man verwandle die gegebene Figur, nach Aufgabe 403, in ein gleichflächiges Dreieck und dieses, nach Aufgabe 393, in ein Parallelogramm rstu. Suche zu ac, rs, st die vierte Proportionale, bilde aus dieser doppelt genommen, gleich ce, und aus ac ein Parallelogramm
Fig. 401. adec, so daß ∟eca = usr, verlängere ed und trage in bac den gegebenen Winkel β. Dessen Schenkel schneidet dann auf der Verlängerung von ed die Spitze b des gesuchten Dreiecks acb.

Beweis. Zuerst in Bezug auf die angewendeten Aufgaben, dann aus 66, 44.

337. Es ist ein Dreieck abc gegeben; man soll aus der Spitze c eine Transversale so ziehen, daß das Rechteck ab . cd gleichflächig dem Rechteck ac . bc werde.

Fig. 402. Auflösung. Man trage an ab einen Winkel gab, welcher gleich ist dem Winkel acb und ziehe durch c die Transversale cd parallel ag.

Beweis. Die Dreiecke cdb und abc sind ähnlich, weil ∟acb = cdb und ∟cbd beiden Dreiecken gemein ist. Daher hat man

$$ab : ac = bc : cd,$$

also

$$ab \,.\, cd = ac \,.\, bc.$$

338. Es ist ein Dreieck ors gegeben, man soll ein anderes von nfachem Inhalt construiren, welches dem gegebenen ähnlich ist.
Fig. 403.

Auflösung. Man betrachte os als Seite eines Quadrats, um, nach Aufgabe 341, die Seite eines solchen zu suchen, welches den nfachen Inhalt hat. Hat man die Seite des letztern in on gefunden, so verlängere man os, mache die verlängerte Seite gleich on, ziehe nm parallel sr und ergänze das Dreieck nom, welches dann das nfache des Dreiecks ors ist.

Beweis. Die Dreiecke nmo und ors sind ähnlich; setzt man den Inhalt des erstern Q, den des zweiten q, so ist, nach 68,

$$q : Q = os_q : on_q$$

und nach der Construction

$$os_q : on_q = 1 : n,$$

folglich

$$q : Q = 1 : n$$

d. i.

$$n \,.\, q = Q.$$

339. Es ist eine gradlinige Figur und ein Dreieck mna gegeben, man soll ein anderes Dreieck zeichnen, welches inhaltsgleich der gegebenen Figur und ähnlich jenem Dreieck ist.

Auflösung. Verwandle die gegebene Figur, nach Aufgabe 335, in ein Dreieck, welches mit dem gegebenen einen Winkel man gleich hat. Es sei abc das aus der vorgenommenen Verwandlung der Figur hervorgegangene Dreieck. Man lege die beiden Dreiecke mit dem gleichen Winkel auf einander, ziehe ce parallel mn, beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in e eine Normale eg und ziehe aus a den Bogen gf. Fig. 404.

Legt man nun durch den Durchschnitt f eine Parallele mit mn, so ist fad das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da df parallel mn, so ist, nach 57, das gefundene Dreieck dem gegebenen ähnlich.

Es ist ferner, nach 62,

$$ae : ag = ag : ab$$

oder $$ae : af = af : ab,$$

das ist $$ae \,.\, ab = af_q.$$

Setzt man Q für den Inhalt des Dreiecks afd, und q für den von aec, so hat man, nach 68,

$$Q : q = af_q : ae_q$$

also auch $$Q : q = ae \,.\, ab : ae_q,$$

oder $$Q : q = ab : ae.$$

Ferner verhalten sich die Dreiecke

$$abc : aec = ab : ae, \text{ nach } 64,$$

d. i. $$abc : q = ab : ae.$$

Folglich ist der Inhalt des Dreiecks abc gleich Q oder gleich dem Dreieck afd.

340. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich sei einem gegebenen Rechteck cdbf. Fig. 405.

Auflösung. Man verlängere die Seiten de und bd des Rechtecks, mache ad gleich de, beschreibe über ab einen Halbkreis und construire mit dem abgeschnittenen Stück dg das Quadrat dghc.

Beweis. Aus 36, 61, 67.

341. Es ist ein Quadrat efgm gegeben, man soll ein anderes zeichnen, welches ein n faches des gegebenen ist.

Auflösung. Man nehme die Diagonale eg des gegebenen Quadrats efgm, trage sie auf die Verlängerung der Quadratsseite in fd und ziehe dg; setzt man dieses Verfahren fort, daß man immer die zuletzt gefundene Hypotenuse auf die Verlängerung trägt und so nach und nach die Längen fd, fc, fb, fa .... findet: so sind diese die Seiten von Quadraten, die Vielfache des gegebenen sind. Es ist nemlich $fd_q = 2 \,.\, ef_q$; $fc_q = 3 \,.\, ef_q$; $fb_q = 4 \,.\, ef_q$.... Fig. 406.

Beweis. Aus 47.

Anmerkung. Diese Auflösung läßt sich, wenn n eine große Zahl ist, vereinfachen, wenn man auf beide Katheten Seiten von bereits gefundenen Vielfachen aufträgt. Hat man z. B. bereits fb und fa gefunden und trägt bf in fk und zieht die Diagonale ak, so ist diese unmittelbar Seite eines Quadrats, welches gleich ist $9 \, . \, ef_q$.

Beweis. Aus 47.

342. Ein Quadrat zu zeichnen, welches das dreifache eines gegebenen abcd ist.

Fig. 407. Auflösung. Für diesen speciellen Fall läßt sich folgende Construction anwenden:

Verlängere eine Seite bc, beschreibe aus c einen Halbkreis, trage den Radius bc als Sehne in bm und ziehe mp, so ist letztere die Seite des gesuchten Quadrats $3 \, . \, ab_q$.

Beweis. Man sieht leicht, daß das Verfahren im Wesentlichen das der vorigen Aufgabe ist.

Man hat nemlich einen rechten Winkel bmp gebildet, die eine Kathete $1 \, . \, bc$, die Hypothenuse $2 \, . \, bc$ gleich gemacht. Das Quadrat der andern Kathete ist daher

$$bp_q - bm_q = 4 bc_q - bc_q = 3 \, . \, bc_q.$$

343. Die Summe zweier gegebenen Quadrate, deren Seiten in m und n gegeben sind, als Quadrat darzustellen.

Auflösung. Man zeichne ein rechtwinkliches Dreieck, dessen Katheten jene Linien sind. Die Hypothenuse ist dann die Seite eines Quadrats gleich der Summe $m_q + n_q$.

Beweis. Leicht.

344. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich ist der Differenz zweier Quadrate, deren Seiten gleich m und n sind.

Fig. 408. Auflösung. Man mache eine Kathete ac des Dreiecks abc, gleich m, und schneide die andere aus a mit einem Radius, gleich n, in b. Es ist dann

$$bc_q = n_q - m_q.$$

Beweis. Leicht.

345. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich ist $\frac{1}{n}$

Fig. 409. eines gegebenen von der Seite, gleich m.

Auflösung. Man construire zu m und $\frac{1}{n}$ m die mittlere Proportionale, so ist in dieser die Seite des verlangten Quadrats gefunden.

Beweis. Ist $op = m$, $up = \frac{1}{n} \, . \, m$, so hat man

$$op : pr = pr : \frac{1}{n} . op,$$

d. i. $$m : pr = pr : \frac{1}{n} . m,$$

und $$\frac{1}{n} . m_q = pr_q = qprs.$$

346. Es ist ein Quadrat adef gegeben, man soll ein rechtwinkliches Dreieck zeichnen, welches den rechten Winkel mit dem Quadrat gemein hat, auf dessen Hypotenuse die Ecke e des Quadrats liegt und welches gleich 8 . adef ist. Fig. 410.

Auflösung. Man verlängere af und ad, ziehe die Diagonale ae, und bc normal ae durch e; so ist $bc_q = 8\, af_q$.

Beweis. Da de und ab parallel sind, so ist

$$bc : ce = ac : cd;$$

es ist aber das Dreieck abc gleichschenklich, also $ce = \frac{1}{2} bc$, $cd = \frac{1}{2} ac = de$.

Daher ist $(\frac{1}{2} bc)_q = de_q + cd_q = 2 . de_q$

und $\frac{1}{4} . bc_q = 2 . de_q$,

folglich $bc_q = 8 . de_q$.

347. Es ist ein Quadrat pqrs gegeben, man soll ein rechtwinkliches Dreieck zeichnen, dessen Hypothenuse mit einer Seite des Quadrats zusammenfällt, dessen Katheten durch die andern Ecken des Quadrats gehen, und wovon das Quadrat auf der Hypotenuse gleich $9 . qr_q$ ist. Fig. 411.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale qs, mit dieser die Parallele mo, und mn normal mo; verlängert man noch qr, so ist mno das verlangte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck qsn ist ein gleichschenkliches,

also $qr = rn = qo = \frac{1}{3} on$;

daher $qr_q = (\frac{1}{3} on)_q = \frac{1}{9} . on_q$

und $9 . qr_q = on_q$.

348. Man soll ein Quadrat zeichnen, welches $p . \frac{1}{n}$ z. B. $\frac{5}{7}$ eines Quadrats ist, dessen Seite in m gegeben ist.

Auflösung. Das Verfahren ist übereinstimmend mit der Auflösung von Aufgabe 345; nur daß man hier Fig. 409.

$$op = m \text{ und } up = p . \frac{1}{n}\, op = \frac{5}{7}\, op \text{ macht.}$$

349. Ein Quadrat zu bilden, welches gleich ist der Summe mehrerer Quadrate von den Seiten m, n, o ....

Auflösung. Man zeichne ein rechtwinkliches Dreieck, dessen Katheten zweien der gegebenen Quadrate, m und n, gleich sind, so ist das Quadrat der Hypotenuse, gleich $m_q + n_q$. Fig. 412.

Ueber der Hypotenuse construire man wieder ein solches Dreieck bce, dessen Kathete be = o ist, so erhält man in ce_q die Summe von $m_q + n_q + o_q$; und fährt man so fort, so wird z. B. $ch_q = m_q + n_q + o_q + p_q + q_q + r_q$ sein.

Beweis. Aus 47.

Anmerkung. In dem Fall, daß die Summanden gleich sind, erhält man auf diese Weise ein Vielfaches von m_q, wie in Aufgabe 341. Man sieht leicht, daß beide Verfahrungsarten im Wesentlichen dieselben sind.

350. Ein Quadrat zu finden, welches gleich ist der Differenz zweier Quadratsummen.

Auflösung. Sind Q, q und Q′, q′ vier gegebene Quadrate, und man soll ein fünftes finden, welches gleich ist $(Q + q) - (Q' + q')$: so bilde man zuerst, nach Aufgabe 348, zwei Quadrate, wovon jedes einer jener Summen gleich ist, und dann eins dergleichen, welches so groß ist, wie die Differenz dieser beiden.

Beweis. Leicht.

351. Zwei gleiche Quadrate zu zeichnen, deren Flächensumme gleich ist der Summe zweier gegebenen Quadrate von den Seiten m und n.

Fig. 413. Auflösung. Man suche zuerst, nach Aufgabe 343, ein Quadrat, welches gleich ist der Summe der gegebenen; ziehe über der gefundenen Seite ab einen Halbkreis, aus dessen Mittelpunkte eine Normale de und noch be: so hat man $be_q = ae_q = \frac{1}{2}(m_q + n_q)$.

Beweis. Leicht.

352. An das kleinere zweier gegebenen Quadrate u_q und v_q eine Figur anzusetzen, welche dem größern Quadrate gleich ist und das Ganze wieder zu einem Quadrat macht.

Fig. 414. Auflösung. Das kleinere Quadrat von der Seite = u sei qrso. Verlängere qo und os, trage die Seite = v des andern gegebenen Quadrats in ot, ziehe qt, mache om gleich qt und ergänze das Quadrat omnp: so ist qmnpsrq die verlangte Figur.

Beweis. Aus 47.

353. Es ist ein Rechteck abcd gegeben, man soll ein Quadrat zeichnen, welches gleich sei dem halben Quadrat der Differenz zweier anliegenden Seiten, nemlich gleich

Fig. 415. $\frac{1}{2} \cdot (ab - bc)_q$, ohne die Differenz selbst zu suchen.

Auflösung. Man halbire die vier Winkel des Rechtecks, so ist das, durch die Halbirungslinien gebildete, Quadrat mnop das verlangte.

Beweis. Da $\llcorner ncb = cbp = \frac{1}{2} R$, so ist $\llcorner cop = R = pon$. Dasselbe gilt von dem Winkel pmn.

Ferner ist $dn \mp bp$ und $ap \mp cn$ und, weil $ou + up = or + rn$, ist mnop ein Quadrat.

Nun ist $pn_q = 2 \cdot mn_q$
und da $qs = sr = sn$
und $br = bc = aq$,
also ar gleich der Differenz (D) ist; so hat man
$$D = ar = aq + 2 \cdot qs = st + 2 \cdot ns = pn,$$
folglich $D_q = 2 \cdot mn_q$
und $\frac{1}{2} D_q = mn_q$.

354. Es ist ein Rechteck abcd gegeben, man soll ein Quadrat construiren, welches gleich ist dem halben Quadrat über der Summe zweier anliegenden Seiten ab und bc des Rechtecks, ohne diese Summe selbst zu suchen. Fig. 416.

Auflösung. Mache die Winkel $nad = nda = cbp = bcp = \frac{1}{2} R$, so ist das Quadrat mnop, welches durch die verlängerten Schenkel entsteht, das gesuchte.

Beweis. Es ist leicht nachzuweisen, daß das gebildete Viereck ein Quadrat ist. Nun ist
$$pn_q = 2 \cdot mp_q$$
und weil $br = rc = pr = rs = \ldots$
so ist $2\,br + cf = 2\,pr + sr$,
d. i. $bf = pn =$ der Summe (S),
also $S_q = 2 \cdot mp_q$.

355. Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck bch inhaltsgleich ist und einen Winkel α hat.

Auflösung. Trage in b den Winkel $ibc = \alpha$, fälle eine Normale hk und mache km gleich der halben Höhe des Dreiecks, ziehe ad parallel bc durch m und ergänze das Parallelogramm abcd. Fig. 417.

Beweis. Aus 44.

356. Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches inhaltsgleich einem gegebenen Dreieck abc ist, eine Seite, gleich q, und einen Winkel α hat. Fig. 418.

1. Auflösung. Man verwandle, nach voriger Aufgabe, das Dreieck in ein gleichflächiges Parallelogramm rnlo, welches den Winkel α hat, verlängere dessen Seiten, mache kr gleich q und ergänze das Parallelogramm lnpk. Ziehe die diagonale Richtung pr, bis sie die Verlängerung nl in g schneidet; vollende das Parallelogramm glki, so ist hrki das verlangte.

Beweis. Aus 45.

2. Auflösung. Hat man, nach voriger Aufgabe, das gleichflächige Parallelogramm rnlo gebildet, so zeichne man einen Winkel rhi = α, suche zu q, or und rl die vierte Proportionale (welche gleich hr sein wird), mache hi = q, hr = jener Proportionale und ergänze das Parallelogramm hiki, welches das verlangte ist.

Beweis. Aus 67.

357. Es ist ein Dreieck abc gegeben, man soll über einer der Seiten (ac) ein Rechteck bilden, welches gleichflächig ist dem Quadrat einer andern Seite (bc) des Dreiecks.

Fig. 419. 1. Auflösung. Mache cd = bc und ziehe de parallel ab; beschreibe aus c mit einem Radius ce einen Bogen, errichte in c die Normale cg und ergänze das Rechteck acgf, so hat man das verlangte.

Beweis. Da die Dreiecke abc und dec ähnlich sind, so ist,

$$ac : cd = bc : ec;$$

weil aber $gc = ec$ und $bc = cd$,

so ist $ac : bc = bc : gc$

folglich $ac \,.\, gc = bc_q$.

2. Auflösung. Man beschreibe über ac einen Halb-
Fig. 420. kreis, trage in diesen die Seite bc als Sehne in cn, fälle aus n die Normale mn, so ist cm . ac das verlangte Rechteck.

Beweis. Aus 62.

358. Es sind zwei verschiedene Dreiecke $a^\circ b^\circ c^\circ$ und $a'b'c'$
Fig. 421. gegeben, deren Inhalte gleich Q und Q′ sind. Man soll eine Linie finden, die, durch ein auf ihr zugleich abgeschnittenes Stück dividirt, zum Quotienten die abstracte Zahl giebt, welche als Quotient der Inhalte beider gegebenen Dreiecke erscheint.

Auflösung. Man verwandle, nach Aufgabe 385, das eine der Dreiecke ($a'b'c'$) in ein gleichflächiges abd, welches mit dem andern eine Seite $ab = a^\circ b^\circ$ hat; verlängere nöthigenfalls ab nach f und ziehe durch die Spitzen die Richtung dc, bis sie ab oder deren Verlängerung schneidet, so ist $\frac{df}{cf} = \frac{Q'}{Q}$.

Beweis. Zieht man die Normalen dn und cm aus den Spitzen der Dreiecke, so hat man

$$\triangle abd : abc = dn : cm,$$

auch $df : cf = dn : cm$,

also $\triangle abd : abc = df : cf$,
oder $Q' : Q = df : cf$.

359. Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches inhaltsgleich einem gegebenen abcd ist, und einen Winkel α enthält.

Auflösung. Man trage in a den Winkel α, verlängere die Seite cd, wodurch das verlangte Parallelogramm abfg, nächst der gleichen Grundlinie, auch gleiche Höhe mit dem gegebenen erhält. Fig. 422.

360. Ueber einer gegebenen Linie q ein Parallelogramm zu zeichnen, welches gleichflächig einem gegebenen ist, und einen Winkel α hat. Fig. 418.

Auflösung. Man bilde nach voriger Aufgabe ein Parallelogramm lnor, welches gleichflächig dem gegebenen ist und einen Winkel α hat; verlängere die Seiten, mache kr gleich q, ergänze das Parallelogramm opqr und ziehe die Diagonale pr bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung von nl. Die Parallele gi bestimmt dann den Abstand der Seiten des gesuchten Parallelogramms hikr.

Beweis. Aus 45.

361. Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches inhaltsgleich einem gegebenen abcd ist und den Winkel α und die Höhe h' hat. Fig. 423.

Auflösung. Man bilde einen Winkel α, ziehe mit dem Abstand h' eine Parallele c'd' und suche zu h', h und ab die vierte Proportionale. Ist diese gleich ab', so ist ab'c'd' das gesuchte Parallelogramm.

Beweis. Aus 65.

362. Es ist eine Figur abcde... gegeben, man soll ein Parallelogramm bilden, welches gleichflächig dieser Figur ist und einen Winkel, gleich α, hat.

Auflösung. Man ziehe aus einer Ecke (f) der Figur Diagonalen fb, fc, fd...., mache, nach Aufgabe 355, das Parallelogramm mnop inhaltsgleich dem Dreieck baf, mit Berücksichtigung des Winkels α, dann das Parallelogramm mnqr, nach Aufgabe 356, gleich dem Dreieck bcf, so daß jenes die Seite mn und den Winkel α hat, und fahre so fort, bis alle Dreiecke der Figur auf die letztere Weise in Parallelogramme verwandelt sind. Die Summe dieser einzelnen Parallelogramme, oder das ganze op.... ki ist dann inhaltsgleich der gegebenen Figur. Fig. 424.

Beweis. Leicht.

363. Ein Rechteck auf eine gegebene Linie bf zu zeichnen, welches inhaltsgleich einem gegebenen Quadrate abcd ist. Fig. 425.

1. Auflösung. Man mache die Kathete bf der gegebenen Linie, die andere bc der Seite des gegebenen Quadrats gleich, und dann ce normal fc; so ist be die Größe der andern Seite des Parallelogramms.

Beweis. Aus 61.

2. Auflösung. Man suche zu bf und bc die dritte Proportionale, so ist diese unmittelbar die andere Seite des verlangten Rechtecks.

Fig. 426. 3. Auflösung. Nach Aufgabe 360, indem an das gegebene Quadrat die Ergänzung an der Diagonale abcd construirt wird.

Beweis. Aus 45.

364. Ueber einer gegebenen Linie ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einer gegebenen Figur A gleichflächig ist und dabei einen Winkel, gleich β, hat.

Auflösung. Man bilde, nach Aufgabe 362, ein Parallelogramm B, welches gleichflächig der gegebenen Figur A ist; und dann, nach Aufgabe 360, ein zweites C, welches gleichflächig B ist und die gegebene Seite und den Winkel α enthält.

Beweis. Leicht.

365. Es ist ein neck abcd... gegeben, man soll ein
Fig. 427. zweites zeichnen, welches jenem ähnlich ist und dessen mit ab gleichliegende Seite mn einer gegebenen Linie u gleich ist.

1. Auflösung. Man ziehe in dem gegebenen neck Diagonalen ac, ad..., trage an mn = u den Winkel omn = α und onm = β, wodurch sich der Eckpunkt o ergiebt; ferner an om den Winkel omp = γ und pnm = δ, deren Schenkel den Eckpunkt p schneiden, u. s. f., bis man nach einander alle Ecken des necks mnop bestimmt hat. Das neck B ist dann ähnlich dem gegebenen neck A.

Beweis. Aus 70, 59.

2. Auflösung. Wenn die mit mn homologe Seite rs gleich u werden soll, so ziehe aus einem beliebigen Punkte c die Rayons cn, cm, cq.... suche zu mn, nc und u
Fig. 428. die vierte Proportionale und trage sie in cs; oder verlängere cm, ziehe ab beliebig, parallel mn, mache sie gleich u, bs parallel ac und rs parallel mn. Ziehe dann durch den jedesmaligen Durchschnittspunkt s, t, u... Parallelen mit den Seiten no, op, pq..., so ergiebt sich nach und nach das ähnliche neck rstu....

Beweis. Wie voriger.

Anmerkung. Man kann auch nach Fig. 429 verfahren und pc unmittelbar, gleich u, machen.

366. Es ist ein neck cdgb ... gegeben, man soll ein ähnliches bilden, dessen Seiten, gleich $\frac{p}{m}$ des gegebenen sind: oder was dasselbe ist, welches sich zu dem gegebenen verhält wie $\left(\frac{p}{m}\right)^2 : 1$. Fig. 429.

1. Auflösung. Man ziehe aus einer Ecke c die Diagonalen cg, cb ..., nehme auf einer, z. B. auf cg das Stück co $= \frac{p}{m} \cdot$ cg, ziehe durch o mit dg und gb, und durch den jedesmaligen Durchschnitt Parallelen mit den bezieblichen Seiten des gegebenen necks, so begrenzen diese nach und nach das verlangte ähnliche neck cpon ....

2. Auflösung. Nach Aufgabe 365, Auflös. 2, indem man cs $= \frac{p}{m} \cdot$ cn macht, u. s. w.

367. Es sind zwei ähnliche necke A und B, Fig. 427, gegeben, man soll ein drittes c zeichnen, welches gleich ist der Summe jener beiden. Fig. 430.

Auflösung. Da sich ähnliche necke verhalten wie die Quadrate gleichliegender Seiten, so verfahre man, nach Aufgabe 343, und nehme die Hypotenuse als beziehliche Seite oder Diagonale jedes Dreiecks des verlangten necks; oder bilde mittelst gleicher Winkel die ähnlichen Dreiecke, in welche man sich die Figur zerlegt denken kann.

Beweis. Leicht.

368. Es sind die ähnlichen necke A und B, Fig. 427, gegeben, man soll ein drittes ähnliches zeichnen, welches gleich ist ihrer Differenz.

Auflösung. Nach Aufgabe 344, indem man an die Stelle der Quadratseiten die homologen Seiten der gegebenen necke setzt.

Beweis. Leicht.

369. Ein neck zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich, einem andern aber gleichflächig ist.

Auflösung. Es seien die beiden Fünfecke L und M gegeben nnd es soll das zu suchende Fünfeck N inhaltsgleich M und ähnlich L sein. Fig. 431.

Man verwandle L in ein Rechteck abeh, so daß beide Figuren eine Seite ab gleich haben; M aber in ein Rechteck bhcd, welches mit dem erstern eine Seite bh gleich hat.

Nun suche man zu ab und bc die mittlere Proportionale (bf), nehme bf als die Seite von dem verlangten Fünfeck, die mit ab in L gleiche Lage hat (mn) und con-

struire mittelst der gleichen Winkel das Fünfeck N ähnlich dem Fünfeck L.

Beweis. Leicht.

370. Es sind zwei Kreise B und D gegeben, man soll einen dritten finden, der gleich ist ihrer Summe, oder gleich ihrer Differenz.

Auflösung. Da sich Kreise, als ähnliche Figuren, verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder ihrer Radien, so suche man die Durchmesser der verlangten Kreise, nach Aufgabe 343, oder nach Aufgabe 344.

371. Man soll die Inhalte mehrerer gegebenen Kreise A, B, C, D ... in einen Kreis vereinigen.

Auflösung. Nach Aufgabe 349, indem man zuerst den Durchmesser eines Kreises von $A + B$, dann von $(A + B) + C$ u. s. w. sucht.

Anmerkung. Mittelst zweckmäßiger Anwendung des Lehrsatzes 47 läßt sich auch ein Kreis bilden, dessen Inhalt gleich ist einer Differenz $A - (B + C + D \ldots)$, unter A, B, C.... die Inhalte mehrerer Kreise verstanden.

372. Es ist ein neck gegeben, man soll ein ihm ähnliches zeichnen, welches den mfachen Inhalt hat.

Fig. 432. Auflösung. Verlängere eine Seite ab und nehme am gleich m . ab, beschreibe über am einen Halbkreis, errichte in b eine Normale, die den Kreis in n schneidet, mache ab' gleich an: so ist ab' die, der Seite ab des gegebenen necks entsprechende, Seite der verlangten Figur.

Zieht man noch die verlängerten Diagonalen aus a, macht $b'c' \mathrel{+\!\!\!=} bc$, $c'd' \mathrel{+\!\!\!=} cd \ldots$, so ergiebt sich nach und nach das gesuchte neck.

Beweis. Leicht.

373. Eine Figur zu construiren welche gleich ist der Summe einer Anzahl unter sich ähnlicher Figuren, und die ihnen ebenfalls ähnlich ist.

Auflösung. Man construire, wenn die gegebenen Figuren mit A, B, C, ... N bezeichnet werden, nach Aufgabe 367, eine Figur a, welche gleich $A + B$ und ihnen ähnlich ist; dann eine zweite b, gleich $a + C$; eine dritte c, gleich $b + D$ und so weiter, bis man die Inhalte der gegebenen Figuren alle in eine einzige Figur m vereinigt hat.

Beweis. Leicht.

374. Das Stück einer Kreisebene zwischen zwei parallelen Sehnen ab und cd ist gegeben; man soll einen Kreisausschnitt bilden, welcher diesem Stück inhaltsgleich ist.

Auflösung. Man ziehe die Radien ob und od, trage die Sehne bd in dc und ziehe den Radius oe; so ist der Kreisausschnitt obde gleich dem Stück abcd. Fig. 433.

Beweis. Ist analytisch zu führen.

375. Man soll einen Kreis beschreiben, welcher gleichflächig dem Ringe ist, den zwei concentrische Kreise von den Radien cd und ce bilden.

Auflösung. Ziehe an den kleinern Kreis eine Tangente gf, welche den größern Kreis in f schneidet; so ist df der Radius des verlangten Kreises. Fig. 434.

Beweis. Es ist, wenn man den Radius df des gefundenen Kreises ϱ, und die Radien der gegebenen R und r setzt, der Bedingung nach

$$R^2\pi - r^2\pi = \varrho^2\pi,$$

d. i.
$$R^2 - r^2 = \varrho^2,$$

oder
$$(R-r)(R+r) = \varrho \cdot \varrho,$$

also
$$R - r : \varrho = \varrho : R + r.$$

Zieht man fe und fm, so hat man, nach 61,

$$de : df = df : dm$$

und weil de = R − r und dm = R + r so ist nothwendig df die Linie, welche, als Radius ϱ genommen, die Bedingung erfüllt.

376. Einen Kreis zu beschreiben, welcher der ringförmigen Fläche inhaltsgleich ist, die von zwei nicht concentrischen Kreisen gebildet wird.

Auflösung. Macht man die Verlängerung von R gleich R + r, und zieht eine Normale durch den Endpunkt, als Sehne im größern Kreise, so ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

377. Einen Kreis zu zeichnen, der gleich $\frac{p}{n}$ eines gegebenen vom Mittelpunkt a ist.

Auflösung. Man suche die mittlere Proportionale cd zu dem Radius ac und zu $\frac{p}{n} \cdot ac = cg$; so ist diese gefundene der Radius des verlangten Kreises d'. Fig. 435.

Beweis. $ac : cd = cd : \frac{p}{n} \cdot ac,$

also $\frac{p}{n} \cdot ac_q = cd_q$

und dann aus 118.

378. Man soll einen Kreis zeichnen, der ein n faches eines gegebenen Kreises ist.

Auflösung. Man verfahre nach Aufgabe 341, indem man statt der Quadratseiten die Durchmesser oder Halbmesser der Kreise setzt.

Beweis. Leicht.

379. Es ist ein Kreis m gegeben, man soll eine, von Halbkreisen begrenzte, Figur construiren, die gleichflächig dem gegebenen Kreise ist.

Auflösung. Man ziehe auf einer Geraden ab eine Normale cd, gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises; beschreibe über ab beliebig einen Halbkreis, doch so, daß
Fig. 436. der Endpunkt d der Normale in seine Peripherie fällt.

Zwei andere beschreibe über den Segmenten des Durchmessers ab; so ist der durch diese drei Halbkreise begrenzte Raum aecfbd inhaltsgleich dem Kreise m.

Beweis. Es ist $cd_q = ac \cdot bc$,

daher $cd_q + (ac \cdot bc + ac_q + bc_q) = ac \cdot bc + (ac \cdot bc + ac_q + bc_q)$

oder $2cd_q + ac_q + bc_q = (ac + bc)_q = ab_q$,

folglich auch, nach 118, wenn man unter m, n, o und p die Kreise selbst versteht,

$$2m + n + o = p,$$

oder $$m = \frac{p - n - o}{2}.$$

Anmerkung. Die schon von Archimedes in Betrachtung gezogenen Figuren ähnlicher Bildung nannte dieser ἄρβηλος.

Man kann zu dieser Klasse die der Aufgaben 291, 292 und 293 zählen. Mehreres darauf beziehliche findet sich in Crelle's Journal der Mathematik.

Neunter Abschnitt.

Aufgaben, die Verwandlung von Figuren betreffend.

380. Es ist das Dreieck cde gegeben, und auf der Richtung cd ein Punkt a; man soll aus a eine Linie ziehen, die ein Dreieck adb abschneidet, welches gleichflächig ist dem Dreieck cde.

Fig. 437. Auflösung. Man verbinde a, e, ziehe durch c eine Parallele mit ae und noch die Linie ab, so ist das Dreieck abd gleichflächig dem Dreieck dce.

Beweis. Das Dreieck abe = eca, nach 42,

daher $dae - abe = dae - eca$,

d. i. $dba = dce$.

381. Es ist ein Dreieck $a'b'c'$ und der Punkt c gegeben, man soll durch c zwei Linien ziehen, so daß das Dreieck abc gleich dem gegebenen werde.

Auflösung. Verbinde cc' und ziehe $b'b$ und $a'a$ parallel cc', $c'a$ noch beliebig: so ist das Dreieck abc inhaltsgleich dem Dreieck $a'b'c'$. Fig. 438.

Beweis. Das Dreieck $cc'a' = cc'a$,
desgleichen $cc'b' = cc'a$.
Daher ist $cc'a' - cc'b' = cc'a - cc'b$,
d. i. das Dreieck $a'b'c' = abc$.

382. Es ist ein Dreieck abc und eine Richtung dc' gegeben, man soll zwei Linien (ab' und ac') durch a so ziehen, daß ein Dreieck $ab'c'$ gleich werde dem gegebenen Dreieck. Fig. 439.

Auflösung. Verlängere bc, ziehe ad und mit dieser parallel bb' und cc'. Verbindet man noch a, b', so ist $ab'c'$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck $adc = adc'$, nach 23, d.
auch $adb = adb'$;
daher $adc - adb = adc' - adb'$,
d. i. $abc = ab'c'$.

383. Es ist das Dreieck nmo und der Punkt b gegeben, man soll aus b zwei Linien (ab und bc) ziehen; so daß das Dreieck abc inhaltsgleich werde dem Dreieck mno.

Auflösung. Man verbinde b mit m und n, ziehe oa parallel bm, und oc parallel bn; so ist das Dreieck abc das gesuchte. Fig. 440, a, b.

Beweis. Fig. 440, a. Das Dreieck $bmo = bma$
und $bno = bnc$;
das Dreieck bnm ist dem gegebenen und dem gefundenen Dreieck gemein; folglich ist das Dreieck $abc = mno$.

Beweis. Fig. 440, b. Das Dreieck
$onm = aobn - obn - aom$
desgleichen $abc = aobn - bcn - abo$;
es ist aber $obn = bcn$, und $aom = abo$,
folglich ist das Dreieck $onm = abc$.

Anmerkung. Auf diesen einfachern Constructionen der Aufgaben 380 bis mit 383 beruhet größtentheils die Verwandlung von Figuren, die zusammengesetzter sind: so wie auch diese Constructionen häufig bei Theilungen anzuwenden sind.

384. Ein gegebenes Dreieck abd in ein gleichflächiges zu verwandeln, dessen Höhe gleich h ist.

Auflösung. Man errichte auf ad beliebig eine Normale $mn = h$ und ziehe no parallel ad. Verlängere db

Fig. 441. nach e, verbinde diesen Durchschnitt auf no mit a und ziehe bc parallel ae durch die Spitze b. Das Dreieck dec ist das gesuchte.

Beweis. Das Dreieck abe = ace,
daher abe — aeg = ace — aeg,
d. i. das Dreieck bge = acg,
folglich dbgc + acg = dbgc + bge,
oder Dreieck dab = dce.

385. Es ist ein Dreieck abd gegeben, man soll es in ein gleichflächiges von der Grundlinie cd verwandeln.

Fig. 441. Auflösung. Man trage cd auf ad, verbinde c mit b, ziehe ae parallel bc und verlängere db bis zum Durchschnitt mit ae. Das Dreieck cde ist das verlangte.

Beweis. Leicht.

386. Es ist ein Dreieck abc, eine Linie de ihrer Größe und Lage nach, und noch eine Richtung mn gegeben; man soll ein Dreieck bilden, welches gleichflächig dem Dreieck abc ist, die gegebene Linie de zur Seite hat und dessen gegenliegende Spitze auf die Richtung mn fällt.

Fig. 442. Auflösung. Man ziehe durch den Endpunkt d der Linie de, welcher dem gegebenen Dreieck zunächst liegt, dk parallel ab und verwandle, nach Aufgabe 384, das Dreieck abc in ein solches afg, welches den Abstand der Parallelen zur Höhe hat.

Trage dann ag beliebig in hi und ziehe die Verbindungslinien hd, id, so hat man hid = agf. Hierauf verwandle, theils nach Aufgabe 384, theils mittelst des Satzes 42, nach einander

1) das Dreieck hid in ein Dreieck dkh, dessen Spitze auf de liegt;
2) das Dreieck dkh in ein anderes dle, dessen Spitze in den Endpunkt e fällt, und
3) das Dreieck dle in ein Dreieck deo, dessen Spitze in mn liegt; welches dann das gesuchte ist.

Beweis. Nach den angewendteten Aufgaben 2c. leicht.

387. Eine gebrochene Grenzlinie in eine gerade zu verwandeln, so daß die abgeschnittenen Theile der einen Seite sich mit denen der andern Seite, ihrem Flächeninhalt nach, ausgleichen.

Fig. 443. Auflösung. Es sei abcdefg die gedachte Grenzlinie; so verbinde man bd und df, ziehe hc ⫩ bd und ei ⫩ df, dann hi und dk ⫩ hi. Man erhält dadurch die beiden Richtpunkte h und k, so daß hk als Grenzlinie die gegebene Bedingung erfüllt.

Beweis. Mit Bezug auf die vorhergehenden Aufgaben.

Anmerkung. Die Auflösung hat keine Schwierigkeiten, im Fall, daß die gegebene Grenzlinie noch mehr auszugleichende Winkel hätte; wenn man nur die erstern Aufgaben dieses Abschnitts gehörig anwendet.

388. Ein ungleichseitiges Dreieck abc in ein gleichseitiges zu verwandeln, welches ersterm inhaltsgleich ist.

Auflösung. Man bilde über bc das gleichseitige Dreieck bcn, fälle die Normale hn, ziehe mn parallel bc und suche zu df = hn und zu da, als den Höhen der Dreiecke cbn und abc, die mittlere Proportionale = dm. Fig. 444.

Nun mache man hp = dm, ziehe pq parallel cn, pr parallel bn, so ist qpr das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es verhalten sich die Dreiecke

$$qpr : abc = qr \,.\, hp : bc \,.\, ad = \frac{qr}{bc} : \frac{ad}{ph}$$

und weil $qr : bc = ph : nh = \frac{ph}{nh} : \frac{ad}{ph}$,

also auch $= ph_q : nh \,.\, ad$,

oder $= dm_q : fd \,.\, ad$;

und da auch $fd : dm = dm : ad$,

d. i. $fd \,.\, ad = dm_q$,

so ist das Dreieck qpr inhaltsgleich dem Dreieck abc.

389. Ein ungleichseitiges Dreieck abc in ein gleichschenkliches, oder rechtwinkliches, oder in ein solches zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel α hat, so daß jedes derselben inhaltsgleich dem Dreieck abc ist.

Auflösung. Man ziehe durch eine Spitze b des gegebenen Dreiecks eine Parallele mit der gegenliegenden Seite, so ist die Parallele bb''' geometrischer Ort für die Spitzen aller Dreiecke, deren Grundlinie ac ist und deren Inhalt gleich dem von abc ist. Fig. 445.

390. Ein gegebenes Dreieck in ein inhaltsgleiches so zu verwandeln, daß eine der Seiten mit einer bestimmten Richtung mn parallel laufe, der gegenliegende Winkel aber beibehalten bleibe.

Auflösung. Man ziehe mit mn durch die Spitze b eine Parallele bg, beschreibe über ac, Fig. 446, a oder ag, Fig. 446, b einen Halbkreis, errichte die Normale gh oder ch und trage ah in ad; verlängere, nach Umständen, ab und ziehe de parallel mn, so hat man in ade das verlangte Dreieck. Fig. 446, a, b.

Beweis. Setzt man den Inhalt des Dreiecks ade = Q, den des Dreiecks abc = q, so ist, nach 66,

$$Q : q = ad . ae : ac . ab,$$
auch ist $ag : ah = ah : ac$,
oder $ag : ad = ad : ac$, nach 62,
desgleichen $ag : ad = ab : ae$,
also $ad : ac = ab : ae$
und $ad . ae = ac . ab$,
folglich auch $Q = q$.

391. Ein Dreieck in ein gleichflächiges Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man suche zu einer Dreiecksseite a und der dazugehörigen halben Höhe, gleich $\frac{1}{2}$ h die mittlere Proportionale, gleich m; so ist diese die Seite des verlangten Quadrats vom Inhalt m_q.

Beweis. Denn da der Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2} h . a$, und nach der Construction $a : m = m : \frac{1}{2} h$ ist, so folgt $a . \frac{1}{2} h = m_q$.

392. Ein Dreieck cde in ein inhaltgleiches Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang gleich dem vierfachen einer gegebenen Linie a sei.

Fig. 447. Auflösung. Man verlängere eine Seite ce nach q und mache $cq = \frac{1}{2} bd$, d. i. gleich der halben zugehörigen Höhe des Dreiecks; beschreibe über eq einen Halbkreis, errichte in c eine Normale cr und schneide aus r mit einem Radius, gleich a, die Linie eq in t. Aus t beschreibe man mit dem Radius tr einen zweiten Halbkreis, wodurch die Länge der Seite cp bestimmt wird; zugleich aber in dem Stück co die andere Seite cm des Rechtecks, welches inhaltsgleich ist dem Dreieck cde.

Beweis. $cq : cr = cr : ce$,
auch $co : cr = cr : cp$;
daher ist $cq . ce = co . cp$,
oder $\frac{1}{2} bd . ce = cm . cp$,
d. i. das Dreieck cde = dem Rechteck cpnm.

Fig. 448. 393. Man soll ein Dreieck hik in ein gleichflächiges Parallelogramm so verwandeln, daß das letztere mit dem erstern einen gleichen oder einen andern bestimmten Winkel φ hat.

Auflösung und Beweis aus den Sätzen 42 und 44, b.

394. Es soll ein Dreieck abc in ein halb so großes Parallelogramm verwandelt werden, welches den Winkel $= \alpha$ hat.

Fig. 449. Auflösung. Man halbire die Dreiecksseiten ac und bc in m und n, trage in n den Winkel α und ziehe pm parallel on, so hat man in mnop das Verlangte.

Beweis. $cn : cb = cf : cd = 1 : 2$

$cn : cb = mn : ab$,

also ist $mn = \frac{1}{2} ab = op$.

Daher ist der Inhalt des Parallelogramms gleich

$$mn \cdot fd = \frac{1}{2} \cdot \left(ab \cdot \frac{cd}{2}\right),$$

und weil der Inhalt des Dreiecks gleich $ab \cdot \frac{cd}{2}$,

so ist $mnop = \frac{1}{2} abc$.

395. Ein Dreieck abc in ein Trapez zu verwandeln, so daß beide Figuren eine der parallelen Seiten bc und einen anliegenden Winkel abc gemeinschaftlich haben, der andere anliegende Winkel dcb aber gleich einem gegebenen α sei.

Auflösung. Ziehe ai parallel bc, trage in c einen Winkel icb $= \alpha$ und ziehe bg parallel ci. Im Durchschnittspunkt g errichte eine Normale, beschreibe über ai einen Halbkreis, trage ih in if und ziehe fe ∤ ic, ed ∤ bc: so ist das Trapez bcde inhaltsgleich dem Dreieck abc. Fig. 450.

Beweis. Werden die nicht parallelen Seiten bis zum Durchschnitt (m) verlängert gedacht, so entstehen die ähnlichen Dreiecke dem und cbm, und man hat

$\triangle dem : cbm = de_q : bc_q$, nach 68,

$= hi_q : ig_q$

und weil nach der Construction

$ig : hi = hi : ai$,

oder $ig \cdot ai = hi_q$,

so ist auch $\triangle dem : cbm = ig \cdot ai : ig_q = ai : ig$,

folglich $\triangle dem - cbm : cbm = ai - ig : ig$,

d. i. $bcde : cbm = ag : ig$.

Es ist aber auch

$\triangle abc : bcm = ab : bm$, nach 64,

und $ab : bm = ag : gi$,

folglich $bcde : bcm = abc : bcm$;

daher $bcde = abc$.

396. Ein Rechteck in ein gleichflächiges Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Trage die beiden ungleichen Seiten des Rechtecks auf eine Richtung in ua und av, beschreibe über deren Summe uv einen Halbkreis, errichte in a eine Normale ac und bilde mit dieser das verlangte Quadrat acdb. Fig. 451.

Beweis. Aus 61, 65.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist übereinstimmend mit Aufgabe 340.

397. Ein Trapez abcd in ein gleichflächiges Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite in der Linie g′ gegeben ist.

Fig. 452. Auflösung. Man ziehe beliebig st normal bd und gleich g′, vr parallel bd; halbire is in w und ziehe auch uq parallel bd, qr und uv aber parallel st; verbinde dann sr und sv, wodurch bd in g und h geschnitten wird. Zieht man durch diese Durchschnittspunkte po und nm parallel st, so ist opnm das verlangte Rechteck.

Beweis. Da dq = cq und bu = au,

so ist $$qu = \frac{ac + bd}{2},$$

also $$qu \cdot si = abcd = vr \cdot si$$

und weil gh parallel vr, so ist

$$si : gh = st : vr$$

$$si \cdot vr = gh \cdot st,$$

d. i. $$abcd = mnop.$$

398. Ein Viereck abcd in ein inhaltgleiches Dreieck zu verwandeln, so daß beide Figuren eine Seite ab und einen Winkel α gemein haben.

Fig. 453. Auflösung. Man verlängere den Schenkel ad des Winkels α, ziehe die Diagonale bd, ihr parallel ch und ergänze das Dreieck abh, welches das gesuchte ist.

Beweis. Das Dreieck bdc = bdh,

daher $$bdc + abd = bdh + abd,$$

d. i. $$abcd = abh.$$

Anmerkung. Diese Aufgabe ist die Grundlage der Operation „ein neck in ein (n—1)eck zu verwandeln." Allgemein stellt sich die Auflösung dahin:

man verwandle das neck in ein (n—1)eck, dieses in ein (n—2)eck u. s. f., bis man auf das Dreieck kommt.

Die meisten der folgenden Aufgaben sind specielle Fälle dieser allgemeinen.

399. Ein Viereck mnop in ein gleichflächiges Parallelogramm zu verwandeln.

Fig. 454. Auflösung. Ziehe eine Diagonale mo, halbire zwei gegenliegende Seiten, on, mp, ziehe durch die Theilpunkte v, w Parallelen mit der Diagonale und rs parallel po, so ist rstu das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da ov = vn

und $$ov : vn = ov' : v'n,$$

so ist $$o'v' = v'n = \tfrac{1}{2} o'n.$$

Ist o′n normal gezogen, so hat man

$$\tfrac{1}{2}(om \cdot o'n) = om \cdot o'v', \text{ nach 44 a,}$$

d. i. das Dreieck $$mno = msto.$$

Ein Gleiches findet für das Dreieck mop statt, folglich
mno + mop = msto + mruo.

400. Ein Parallelogramm abcd in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite in der Linie m gegeben ist.

1. Auflösung. Verlängere ab, mache diese Verlängerung bd' = bc, beschreibe über ad' als Durchmesser einen Kreis und aus b mit dem Radius = m einen Bogen ie. Durch den Durchschnittspunkt e und b lege eine Richtung, die den Kreis in f trifft. Verlängere bc nach g, mache bg = bf, bi = be = m, und ergänze das Parallelogramm bghi. Fig. 455.

Beweis. Aus 92.

Anmerkung. Diese Auflösung ist nicht anwendbar, wenn m>ab und m<bc gegeben ist, weil man dann keine Schnitte des Kreises erhält.

2. Auflösung. Man suche zu m, ab und ad die vierte Proportionale = bg und trage diese auf die Verlängerung von bc, mache bi = m und ergänze das Parallelogramm.

Beweis. Aus 66.

3. Auflösung. Nach Aufgabe 363, 3. mittelst der Ergänzungen an der Diagonale, aus Satz 45.

401. Ein reguläres neck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist.

Auflösung. Man verlängere eine Seite ab, mache ag gleich n . ab und ziehe cg; so ist acg das verlangte Dreieck. Fig. 456.

Beweis. Leicht.

402. Soll das neck in ein Rechteck oder in ein anderes beliebiges Parallelogramm verwandelt werden, so nehme man $\frac{1}{2}$ag zu dessen Grundlinie und den Radius cd zur Höhe.

Beweis. Leicht.

403. Ein Fünfeck debfc in ein Dreieck zu verwandeln, so daß beide Figuren einen gemeinschaftlichen Eckpunkt haben. Fig. 457.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale bc, dann fq parallel bc, verlängere dc bis an fq und ziehe noch bq; so ist zuerst das Dreieck bcf in das inhaltsgleiche bcq verwandelt. Auf gleiche Weise bilde man aus dem Dreieck bde das inhaltsgleiche bdo.

Weil nun das Dreieck bcd beiden Figuren gemein ist, so ist das Dreieck obq = debfc.

Beweis. Leicht.

404. Es ist ein neck abcd.... gegeben; man soll es in ein Dreieck dergestalt verwandeln, daß beide Figuren die
Fig. 458 und 459. Seite ab gemein haben und daß die Spitze des Dreiecks in die anliegende Seite bc oder in deren Verlängerung falle.

Auflösung. Die gegebene Figur kann entweder lauter ausgehende Winkel, wie Fig. 458 oder zum Theil einspringende Winkel, wie Fig. 459 haben. In beiden Fällen verfahre man im allgemeinen folgendermaßen:

man ziehe aus dem Endpunkte a der gemeinschaftlichen Seite Diagonalen nach den übrigen Ecken, verlängere de und ziehe durch f die Linie fm parallel ae; so ist das Dreieck aem gleich dem Dreieck aef. Verlängere dann cd, und ziehe mn parallel ad; so hat man die Dreiecke aem + aed oder das Dreieck adm in das inhaltsgleiche adn verwandelt.

Fährt man so fort, bis man zuletzt die Verlängerung von bc durch die Parallele mit ac geschnitten hat, so hat man in diesem Durchschnittspunkt o die Spitze des verlangten Dreiecks gefunden.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Die allgemeine Gültigkeit dieser Auflösung ist nicht zu bestreiten. Jedoch entstehen in dem Falle, daß die Figur einspringende Winkel hat, zuweilen praktische Unbequemlichkeiten, die das Verfahren nicht nur erschweren, sondern auch wohl praktisch unbrauchbar machen. Diese können eintreten, wenn die Durchschnitte der Verlängerungen mit den Parallelen weit ab von der Figur, wohl ganz außerhalb des Blattes fallen; wenn die Diagonalen sehr nah, oder in einander zu liegen kommen, und in mehrern andern Fällen.

Will man diese Unbequemlichkeiten umgehen, so wende man obiges Verfahren vorzugsweise an, wenn keine eingehenden Winkel vorhanden sind und bediene sich im entgegengesetzten Falle der folgenden Methode.

405. Es soll unter obigen Bedingungen die Figur abcdef... in ein Dreieck verwandelt werden.

Fig. 460. Auflösung. Um zuerst die einspringenden Winkel zu beseitigen, ziehe man durch d eine Parallele mit der Verbindungslinie ce, dann ea′, wodurch das Dreieck cra′ gleich erd gemacht und einer der gedachten Winkel weggebracht worden ist.

Wegen des andern solchen Winkels efg ziehe man fn parallel eg. Diese Parallele trifft die benachbarten Seiten ea′ und gh in m und n; weshalb man sowohl durch ne als auch durch gm den einspringenden Winkel efg ausglei-

chen kann. Durch ne wird nemlich das Dreieck fgn in fen, und durch gm das Dreieck efg in emg gelegt.

Hatte man nun, nach dem ersten Theil der Operation die Figur ea'bahgfe erhalten, so ist diese nach dem zweiten Verfahren entweder in ea'bahne oder in gma'bahg verwandelt worden, woraus die eingehenden Winkel entfernt sind. Das weitere Verfahren geschieht nun nach Aufgabe 404.

406. Ein neck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Das bequemste Verfahren ist das neck, nach Aufgabe 404 und 405, zuerst in ein inhaltgleiches Dreieck und dieses dann, nach Aufgabe 391, in ein Quadrat zu verwandeln.

407. Ein neck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Höhe in die Richtung der Seite ai des necks falle, dessen Grundlinie aber dem normalen Abstand der von ai entferntesten Ecke d gleich sei.

Auflösung. Man verlängere die genannte Seite ai nach k, halbire jedes der Vieleck-Seiten in 5',4',3'.... ziehe die Abscissenlinie dm aus der, in der Aufgabe gedachten, Ecke d normal auf ai, und die Ordinaten aus den Ecken der Figur; auf ak fälle man aber Ordinaten aus den Halbirungspunkten der Seiten. Die Bezeichnung der Fußpunkte dieser Ordinaten stimmt mit der von den Halbirungspunkten, hinsichtlich der gleichen Ziffern. Fig. 461 und 462.

Nun bestimme man auf es den Punkt α, der durch die Richtung d1 geschnitten wird; für den Punkt β nehme man die Richtung d2 und ziehe $\alpha\beta \parallel$ d2; für γ ziehe man $\beta\gamma \parallel$ d3; für δ lege man $\gamma\delta \parallel$ d4, und um endlich den Punkt v zu erhalten ziehe man $\delta v \parallel$ d5.

Dieser Punkt v ist eine Ecke des verlangten Rechtecks. Verfährt man auf der entgegengesetzten Seite der Abscissenlinie dm auf gleiche Weise, so wird man den Punkt u als zweiten Eckpunkt finden; so daß, bei der gegebenen Länge ut = dm der einen Seite, das Rechteck ergänzt werden kann.

Beweis. Das Dreieck des = dm . sα.

Es ist nemlich, nach Fig. 462, mm'αs = e'αdd'', nach 45,

also $\quad$ mm'αs + d'dαs = e'αd'd'' + d'dαs,

d. i. $\quad$ mm'd'd = d''de's.

Da aber d1' = $\frac{1}{2}$ de, also auch se' = $\frac{1}{2}$ se;

so ist das Dreieck $\quad$ des = d''de's.

Denkt man ss' parallel $\alpha\beta$ und parallel d2, so wird

dm : m2 = sq : s'q,

also $\quad$ dm . s'q = m2 . sq sein.

Weil aber $m2 = \frac{es + sq}{2}$,
so ist $dm \,.\, s'q = essq$.

Ferner ist $\alpha s = \beta s'$,
also $dm \,.\, \beta s' = dm \,.\, \alpha s$,
gleich dem Dreieck dse,
folglich $dm\ (qs' + \beta s')$, d. i. $dm \,.\, \beta q = \triangle dse + seqf$.

Verfolgt man den Gang der Construction auf obige Weise weiter, bis man nach und nach alle einzelnen Abtheilungen des n ecks zu einer Summe vereinigt hat, so findet man, daß auf der einen Seite von dm diese Summe gleich dem Rechteck dmvw, auf der andern Seite gleich dem Rechteck dmtu ist; so daß dmvw + dmtu gleich dem Inhalt des gegebenen n ecks sein wird.

Anmerkung. In Bezug auf die Anmerkung zu Aufgabe 404, hat zwar die obige Auflösung mit den dort gedachten Unbequemlichkeiten nicht zu kämpfen; es kann dem ohngeachtet aber zuweilen bequemer sein, die Verwandlung eines n ecks zuerst, nach Aufgabe 404 und 405, in ein Dreieck und dann, nach Aufgabe 356, in ein Rechteck zu bewirken.

408. Es ist eine Anzahl beliebiger n ecke $Q, Q_1, Q^2 \ldots$ gegeben, man soll ein Rechteck bilden, welches gleich

$$\frac{m}{n} \,.\, Q + \frac{m'}{n'} \,.\, Q_1 + \frac{m''}{n''} \,.\, Q_2 + \ldots \text{ ist.}$$

Auflösung. Man verwandle jedes einzelne dieser n ecke in ein Rechteck, so daß die Höhe aller Rechtecke dieselbe ist; theile von jedem, parallel mit der Höhenlinie das verlangte Stück $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''} \ldots$ ab, und setze diese einzelnen Stücke zu einen ganzen Rechteck zusammen.

409. Einen Viertelkreis in einen gleichflächigen Halbkreis zu verwandeln.

Fig. 463. Auflösung. Zieht man die Sehne bc, so hat man in ihr den Durchmesser des verlangten Halbkreises gefunden.

Beweis. Ist q der Inhalt des Viertelkreises und Q der des gesuchten Halbkreises, so ist, weil $ba + ac = 2\,ab$, gleich dem Durchmesser eines Halbkreises vom Inhalt $= 2q$ ist.

$$2q : Q = (2\,ab)_q : bc_q = 4 \,.\, ab_q : bc_q$$

oder $q : Q = 2 \,.\, ab_q : bc_q$.

Es ist aber, nach 47,

$$ab_q + ac_q = bc_q,$$

oder $2 \,.\, ab_q = bc_q$,

folglich auch $q = Q$.

410. Einen Halbkreis in einen inhaltsgleichen ganzen Kreis zu verwandeln.

Auflösung. Ziehe den normalen Radius cd und die Sehne ad, so ist letztere Durchmesser des verlangten Kreises. Fig. 464.

Beweis. Dem vorigen ähnlich.

411. Einen Kreis in einen gleichflächigen halben zu verwandeln. Fig. 465.

Auflösung. Nachdem man zwei normale Radien gezogen hat, lege man durch die Endpunkte eine Richtung dn und nehme die Sehne als Radius des gesuchten Kreises.

Beweis. Leicht.

412. Ein Quadrat annähernd in einen gleichflächigen Kreis zu verwandeln.

Auflösung. Man theile die halbe Diagonale od in fünf gleiche Theile und nehme vier solcher Theile zu dem Radius des Kreises. Fig. 466.

Beweis. Nimmt man einen der fünf Theile als Maaßeinheit = n, so ist die Quadratfläche = 50 . n_q. Der Inhalt des gefundenen Kreises aber ist $4^2 . \pi . n_q$, = 50, 26 . . . n_q, also ist der Kreis um 0, 26 . . . n_q größer als das Quadrat.

Anmerkung. Soll man den Kreis annähernd in ein gleichflächiges Quadrat verwandeln, so ist die Auflösung leicht aus der vorstehenden Aufgabe abzuleiten; der Annäherungswerth ist derselbe.

413. Man soll eine von zwei Viertelkreisen und einem Halbkreise begrenzte Figur ambncda in ein gleichflächiges Quadrat verwandeln.

Auflösung. Das Resultat ergiebt sich in dem Quadrat abcd, dessen Construction aus der Figur deutlich ist. Fig. 467.

Beweis. Setzt man den Halbmesser = n, so ist der Inhalt des Halbkreises $= \frac{1}{2} n^2 \pi = \frac{3{,}1415 \ldots n^2}{2} =$ 1, 5707 . . . n^2, und des übrigen Theils der Figur $= 2n^2 - 1{,}5707 \ldots n^2 = 0{,}4293 \ldots n^2$; also deren Gesammtinhalt $= 2n^2$, welcher dem Inhalt des Quadrats $2n^2$ gleich ist.

Zehnter Abschnitt.

Aufgaben, die Theilung von Figuren betreffend.

414. Ein gegebenes Dreieck abc durch eine, mit einer Seite parallele Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

1. Auflösung. Man beschreibe über einer Seite ac einen Halbkreis, errichte in dem Mittelpunkte eine Normale

Fig. 468. fg, mache cd = cg und ziehe durch d eine Parallele de mit der Seite ab. Diese Parallele theilt das Dreieck, wie verlangt worden.

Beweis. $\frac{cf}{cg} = \frac{cg}{ac}$, nach 62,

und $\frac{cf}{cg} \cdot \frac{cg}{ac} = \frac{cg}{ac} \cdot \frac{cg}{ac}$,

also $\frac{cf}{ac} = \frac{cg_q}{ac_q} = \frac{1}{2}$.

Daher $cg_q : ac_q = 1 : 2$,

oder $cd_q : ac_q = 1 : 2$,

folglich ist, nach 68, das Dreieck cde = ½ abc oder cde = abed.

Fig. 469. 2. Auflösung. Man beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in dem Mittelpunkt m die Normale mn, mache af = an, ziehe fe ∦ ac und ed ∦ ab; so ist ed die verlangte Theilungslinie.

Beweis. Nach Vorigem.

414 a. Es ist ein Dreieck abc gegeben, man soll auf ab oder auf deren Verlängerung eine Normale ziehen, die mit den Richtungen ac und ab ein Dreieck bildet, das dem gegebenen inhaltsgleich ist.

Fig. 470, a, b. Auflösung. Man fälle aus der Spitze c eine Normale cd auf die Gegenseite oder deren Verlängerung, suche zu ad und ab die mittlere Proportionale, trage sie in af und errichte in f eine Normale.

Das Dreieck afe ist dann gleichflächig dem gegebenen Dreieck abc.

Beweis. Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ist

$$af : ef = ad : cd,$$

oder $$\frac{af}{ef} = \frac{ad}{cd}.$$

Durch Construction ist

$$af_q = ab \cdot ad,$$

daher $af_{,} = ab \,.\, ad : \frac{ad}{cd}$,
d. i. $af \,.\, ef = ab \,.\, cd$,
also das Dreieck afe inhaltsgleich dem Dreieck abc.

415. Ein Dreieck durch eine, auf einer Seite normale Linie so zu theilen, daß sich das abgeschnittene Stück zu dem ganzen Dreieck verhält wie n : m.

Auflösung. Man suche zu der Projection bd von der Seite bc, zu bc und ab die vierte Proportionale; verlängere bc und trage die gefundene Proportionale in bi. Suche dann zu m, n und bc die vierte Proportionale und trage sie in bg; beschreibe über gi einen Halbkreis, errichte in b eine Normale und trage sie in be. Zieht man noch ef normal ab, so ist ef die verlangte Theilungslinie. Fig. 471.

Beweis. Nach der Constr. ist
$$bd : bc = ab : bi,$$
daher $$ai \not\parallel cd \not\parallel ef.$$
Desgleichen $$m : n = bc : bg$$
und $$bg : be = be : bi,$$
daher $$bg = \frac{bc \,.\, n}{m} \text{ und } bg = \frac{be^2}{bi},$$
mithin $$\frac{bc \,.\, n}{m} = \frac{be^2}{bi}.$$
Da auch $$bi : ab = be : bf$$
und $$bi = \frac{ab \,.\, be}{bf},$$
so hat man $$\frac{bc \,.\, n}{m} = be^2 : \frac{ab \,.\, be}{bf},$$
oder $$\frac{bc \,.\, n}{m} = \frac{be \,.\, bf}{ab},$$
daher $$(ab \,.\, bc)\, n = (be \,.\, bf)\, m,$$
woraus folgt $ab \,.\, bc : be \,.\, bf = m : n$.
Nach 66. verhält sich aber
$$\triangle abc : \triangle bfe = ab \,.\, bc : be \,.\, bf,$$
folglich $$\triangle abc : \triangle bfe = m : n.$$

Anmerkung. Die Auflösung wäre auch erfolgt, wenn man zu bd und bc die dritte und zu m, n und ab die vierte Proportionale gesucht hätte. Auch ließen sich noch verschiedene andere Constructionen hierzu finden.

416. In einem Dreieck mno einen Punkt p zu finden, dessen Verbindungslinien mit den Ecken das Dreieck in drei inhaltsgleiche Theile zerlegen.

1. Auflösung. Man theile eine beliebige Seite (mo)
Fig. 472. in drei gleiche Theile, ziehe pr ∥ on und pq ∥ mn; so schneiden sich die Parallelen in dem gesuchten Punkte p.

Beweis. Verlängert man die Parallelen pq und pr und zieht noch pu parallel om, so ist

$$ns : nm = or : om = 1 : 3,$$

desgleichen $tn : on = mq : om = 1 : 3.$

Die Parallele rs ist aber der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke von den Grundlinien nt, tu, uo, welche $\frac{1}{3}$ opn sind; daher ist

$$\triangle opn = 3 \,.\, tpn = 3 : opu$$
$$\triangle npm = 3 \,.\, nps$$

und $\triangle opm = 3 \,.\, opr.$

Nun ist aber $tpn = nps$

und $opu = opr$, nach 36, d.

folglich $\triangle npm = opn = opm.$

2. Auflösung. Halbire die Seiten des Dreiecks in d, e, f und ziehe die Transversalen bd, ae und cf; so sind
Fig. 473. die Dreiecke agc, cgb, bga inhaltsgleich und also jedes $\frac{1}{3}$. abc.

Beweis. Die Dreiecke afc und bfc sind, nach 41, gleich; eben so die Dreiecke afg und bfg;

daher ist $afc - afg = bfc - bfg,$

d. i. $\triangle acg = bgc.$

Dasselbe gilt von dem Dreieck abg, verglichen mit einem der bewiesenen Dreiecke; folglich ist jedes der dritte Theil des gegebenen.

417. Ein gleichschenkliches Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theillinien normal auf den Seiten stehen und sich in einem Punkte p innerhalb des Dreiecks treffen.

Auflösung. Die Normale cd ist nothwendigerweise der geometrische Ort des Punktes p und die Richtung der einen Theillinie.

Man verlängere ab, mache dh gleich cd, errichte hi
Fig. 474. normal ch und gleich cd, und ziehe ci; theile ci in drei gleiche Theile, wovon ck ein solcher Theil ist, beschreibe aus c mit dem Radius ck einen Bogen und errichte in e und f Normalen, welches dann die gesuchten Theillinien sind.

Beweis. $hc_q = hd_q + cd_q = 2\,cd_q$

$$ic_q = hi_q + hc_q = 3\,cd_q,$$

also $\frac{1}{3} ic_q = cd_q.$

Nun ist $cd : \frac{1}{3} ic = ic : cd,$

d. i. $cd : cf = 3\,cf : cd$

und weil $\triangle cfp \backsim \triangle cda$,
so hat man $cd : cf = ad : pf$.
Daher $ad : pf = 3 cf : cd$
oder $ad \cdot cd = 3 \cdot pf \cdot cf$
und $2 \cdot ad \cdot cd = 6 \cdot pf \cdot cf$,
d. i. $\frac{1}{3} \triangle abc = cepf$;
und also auch $adpf = bdpe = \frac{1}{3} abc$.

418. Der Punkt p der Aufgabe 416 soll so bestimmt werden, daß die Theilungslinien Dreiecke abschneiden, die sich verhalten wie $n' : m' : o'$.

Auflösung. Man theile om in Theile, die sich verhalten wie $n' : m' : o'$ und verfahre dann wie bei Aufgabe 416, I. Fig. 472.

Beweis. Leicht.

419. Ein Dreieck abc in zwei gleiche Theile so zu theilen, daß die Umfänge beider Theile gleich seien.

Auflösung. Auf der Verlängerung von ac nehme man $ao = \frac{1}{2} ab$, beschreibe über co einen Halbkreis, errichte in a eine Normale ah, nehme $ak = \frac{1}{4}(ab + bc + ac)$ und beschreibe aus k mit dem Radius ak einen Halbkreis. Zieht man dann $ph \mathrel{\#} ac$, fällt die Normale pd und nm aus den Durchschnittspunkten, macht $ae = am$ und verbindet d, e: so bewirkt de die verlangte Theilung. Fig. 475.

Beweis. Nach 66 ist
$$\triangle abc : ade = ac \cdot ab : ad \cdot ae$$
und nach 94, $ah_q = hn \cdot hp$;
ferner ist nach 89 und 61,
$$ah_q = ao \cdot ac,$$
und weil $ao = \frac{1}{2} ab$
$$ah_q = \frac{1}{2} ab \cdot ac,$$
folglich $hn \cdot hp = \frac{1}{2} ab \cdot ac$,
d. i. $ae \cdot ad = \frac{1}{2} ab \cdot ac$.
In Bezug auf die zweite Bedingung soll
$$de + ad + ae = de + be + bc + cd$$
sein. Da nun
$$aq = dq + ad$$
$$dq = ao = ae,$$
so ist $aq + de = ad + ae + de$.
Es ist aber $ak = \frac{1}{4}(ab + bc + ac)$ construirt,
daher $aq = \frac{1}{2}(ab + bc + ac)$
und $aq + de = \frac{1}{2}(ab + bc + ac) + de$;
folglich $ad + ae + de = be + \frac{1}{2}(bc + ac) + de$.

Kann man noch nachweisen, daß $\frac{1}{2}(bc + ac) = cd + bc$ ist, so ist die Gleichheit der Umfänge entschieden.

Man hatte nach Obigem

$$aq = \tfrac{1}{2}(ab + bc + ac)$$

und, weil $ac = cd + ad$ ist,

$$aq = \tfrac{1}{2}(ab + bc + cd + ad)$$

oder $aq = be + \tfrac{1}{2}(bc + cd + ad)$,

also $2aq = 2be + bc + cd + ad$.

Es ist aber $2aq = 2ad + dq = 2(ad + be)$,

daher $2(ad + be) = 2be + bc + cd + ad$,

d. i. $ad = bc + cd$

und $\tfrac{1}{2} ad = \tfrac{1}{2}(bc + cd)$

$$\tfrac{1}{2}(ad + cd) = \tfrac{1}{2} bc + cd$$

und weil $\tfrac{1}{2}(ad + cd) = \tfrac{1}{2} ac$,

so hat man $\tfrac{1}{2} bc + cd = \tfrac{1}{2} ac$

und $bc + cd = \tfrac{1}{2}(ac + bc)$, was nachzuweisen war.

Anmerkung. Ist $\tfrac{1}{2}(ac \,.\, ab) > ak_q$ so ist die Aufgabe unmöglich, weil d außerhalb des Dreiecks fällt. Man umgeht diesen Umstand, wenn man immer von derjenigen Spitze (a) aus operirt, wo die größte und die kleinste Seite zusammenstoßen.

420. Ein Dreieck durch Linien, wovon die eine einer Seite parallel, die andere ihr normal ist, in drei gleichflächige Theile zu theilen.

Fig. 476. Auflösung. Man trage in oc den dritten Theil von ac, suche zu ac und oc die mittlere Proportionale (pc), trage diese in ce und ziehe de parallel ab; so ist das Dreieck ecd $= \tfrac{1}{3}$ abc.

Nun halbire man ae, ziehe mn parallel ab, halbire mn in h und ziehe durch h die Normale fg; so ist jedes der Trapeze aefg und bdfg $= \tfrac{1}{3}$ abc.

Beweis. Da $ac : ce = ce : oc$,

d. i. $ac \,.\, \tfrac{1}{3} ac = ce_q$,

so ist $\tfrac{1}{3} ac_q = ce_q$

oder das Dreieck $ced = \tfrac{1}{3} abc$.

Zieht man ik parallel ae durch m,

so ist $nefh = ghmk$

und $agnh = fihm$;

daher $nefh + agnh = ghmk + fihm = ghbm + hmfd$;

folglich $aefg = gfdb = \tfrac{1}{2} aedb = \tfrac{1}{3} abc$.

421. Ein Dreieck rsq in drei gleiche Theile so zu theilen, daß zwei Theillinien parallel mit zwei Seiten des Dreiecks laufen und den dritten Theil als ein, dem Ganzen ähnliches, Dreieck abschneiden.

Fig. 477. Auflösung. Man nehme $qn = \tfrac{1}{3} qs$, suche zu qs und qn die mittlere Proportionale (qm), trage diese in qo und

ziehe op parallel qr; so ist op der geometrische Ort für die Spitzen aller, dem gegebenen ähnlichen Dreiecken auf der Grundlinie qr, deren jedes gleich $\frac{1}{3}$ qrs ist.

Es kommt also noch darauf an, das Dreieck pso zu halbiren und die zur Seite des abzuschneidenden Dreiecks kli liegenden Parallelogramme einander inhaltsgleich zu machen. Dieses wird einfach bewirkt, wenn man po in i halbirt und mit den Seiten des Dreiecks li und ki parallel zieht.

Beweis. Da das gegebene Dreieck dem abgeschnittenen, nach 58, b ähnlich ist, so hat man, nach 68,

$$\triangle rsq : lik = qs_q : ik_q;$$

durch Construction ist ferner

$$qs : qo = qo : qn$$

oder $qs : qo = qo : \frac{1}{3} qs,$

also $\frac{1}{3} \cdot qs_q = qo_q = ik_q;$

daher ist das Dreieck $ikl = \frac{1}{3} qrs.$

Weil nun, nach 42, $rpil = oqik$

und $ips = iso,$

so ist auch $rsli = sqki = \frac{1}{3} qrs.$

422. Ein Dreieck abc in n, z. B. in fünf inhaltsgleiche Theile zu zerlegen, so daß die Theillinien mit einer Seite ab parallel laufen.

1. **Auflösung.** Theile eine der Nebenseiten von ab in n (5) gleiche Theile, beschreibe über ac einen Halbkreis und ziehe aus den Theilpunkten g, e, f, h die Ordinaten normal ac. Die dadurch bestimmten Sehnen cn, cm, ... cp trage aus c in n′, m′ ... p′ und ziehe durch genannte Punkte Parallelen mit ab, die dann soviel gleiche Theile abschneiden, als in n verlangt worden sind. Fig. 478.

Beweis. Da die parallelen Theillinien ähnliche Dreiecke abschneiden, und sich diese unter einander verhalten, wie die Quadrate gleichliegender Seiten, so hat man

$$\triangle cn'n'' : cm'm'' = cn'_q : cm_q.$$

Nun ist, nach 62,

$$ch : cn = cn : ac,$$

d. i. $\frac{1}{5} ac : cn' = cn' : ac$

oder $\frac{1}{5} \cdot ac_q = cn'_q,$

desgleichen $\frac{2}{5} ac_q = cm'_q,$

folglich ist das Dreieck $cn'n'' = \frac{1}{5} abc$

und $cm'm'' = \frac{2}{5} abc,$

also $cm'm'' - cn'n'' = n'n''m'm'' = \frac{1}{5} abc$ u. s. w.

2. **Auflösung.** Ist ckl das in fünf Theile zu theilende Dreieck und lk die Seite, mit welcher die Theillinien parallel laufen sollen; so ziehe man durch die gegenliegende Spitze c eine Normale auf cl, mache cm = cn = cl Fig. 479.

und theile cn in die verlangte Anzahl gleicher Theile, welche das Dreieck erhalten soll.

Nun beschreibe man über om, pm, . . . nm Halbkreise und ziehe durch deren Durchschnitte auf cl die parallelen Theillinien ba, ed . . . . ih.

Beweis. Ist dem vorigen ähnlich.

423. Ein Dreieck durch eine, mit einer Seite ab parallele Linie in zwei solche Theile zu theilen, die sich verhalten wie m : n; oder gleichviel, daß sich das abgeschnit-

Fig. 480. tene Stück zu dem ganzen Dreieck verhält wie m : m + n, z. B. wie 2 : 5.

Auflösung. Man theile die anstoßende Seite ac nach dem gegebenen Verhältniß, so daß hier cg $= \frac{2}{5}$ ac wird und verfahre nach voriger Aufgabe, Aufl. 1.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Setzt man m = n, so hat man die Aufgabe 414, und ist m = 1, 2 . . . n nach einander, und n + m jedesmal constant, so hat man in obiger Aufgabe die einzeln gestellte Construction der Aufgabe 422, Aufl. 1.

424. Durch einen Punkt v außerhalb eines Dreiecks mop eine Richtung zu legen, die von dem Dreieck einen Theil abschneidet, welcher gleich $\frac{p'}{n'}$, z. B. $\frac{3}{5}$ des gegebenen Dreiecks ist.

Fig. 481. Auflösung. Man nehme oq gleich $\frac{p'}{n'}$. om, also hier $\frac{3}{5}$ om, ziehe pq, verlängere op und schneide diese Verlängerung durch eine Parallele mit om durch v in w. Hierauf verwandle man, nach Aufgabe 384, das Dreieck opq in das gleichflächige owr, dessen Höhe durch die Parallele vw gegeben ist, ziehe uv parallel ow, dann über ur einen Halbkreis und aus o eine Normale ot.

Nun halbire man or in s, ziehe st und mache sn gleich st. Zieht man noch die Richtung nv, so schneidet diese das verlangte Stück = $\frac{3}{5}$ omp in dem Dreieck nok ab.

Beweis. Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks nok mit Q und den des Dreiecks nvu mit Q′, so ist

$$Q : Q' = no_q : nu_q = or \,.\, nu : nu_q = or : nu$$

(es ist nemlich $ot_q = st_q - os_q = sn_q - os_q = (sn + os)(sn - os)$

oder $ot_q = on \,.\, rn$,

auch ist $ot_q = or \,.\, ou$,

daher $on \,.\, rn = or \,.\, ou$

oder $on : ou = or : rn$,

also auch $on : on + ou = or : or + rn$,

d. i. $on : nu = or : on$,
folglich $on_q = or . nu$).
Es verhält sich aber auch
$\triangle owr : nvu = or : nu$,
daher $owr = nok = Q$
und weil $owr = opq = \frac{3}{5} opm$,
so ist auch $Q = \frac{3}{5} Q'$.

425. Durch einen Punkt r der Seite eines Dreiecks abc eine Linie so zu legen, daß sie das Dreieck in zwei Stücke theile, die sich verhalten wie m : n, z. B. wie 3 : 5; oder gleichviel, die $\frac{3}{8}$ des gegebenen abschneide.

1. Auflösung. Man verbinde c, r, verlängere ac nach m, ziehe bm parallel cr und dann rm. Die Linie am theile man in soviel gleiche Theile als m+n Einheiten enthält, also hier in 8 Theile, verbinde r mit dem Theilpunkt 5 (wegen des Nenners von $\frac{3}{5}$), ziehe durch 5 eine Parallele mit cr und verbinde deren Durchschnitt s mit r, so ist das Dreieck $brs = \frac{3}{8}$ des gegebenen und verhält sich zu $srac = 3 : 5$. Fig. 482.

Beweis. Das Dreieck $bcr = rcm$,
daher $arc + crm = arc + rbc$
oder $arm = abc$.
Nun ist das Dreieck $ard = \frac{5}{8} arm$
und $cgd = gsr$,
also auch $acrs = ard = \frac{5}{8} arm = \frac{5}{8} abc$,
folglich ist das Dreieck $rsb = \frac{3}{8} abc$,
oder $\triangle rsb : abc = 3 : 8$
und $\triangle rsb : csrb = 3 : 5$.

2. Auflösung. Ist d der gegebene Punkt, so theile man bc so, daß $bg : gc = 5 : 3$ werde, ziehe da und ihr parallel gh; so ist h der Punkt, in welchem die Theillinie dh die Seite ac trifft. Fig. 483.

Beweis. Das Dreieck $gha = ghd$, also
$gha + ghc = ghd + ghc$,
oder $agc = dhc$.
Mithin $abc : agc = abc : dhc$
und $abc - agc : agc = abc - dhc : dhc$
oder $bag : agc = bdah : dhc$.
Es ist aber $bag : agc = bg : gc = 5 : 3$,
folglich auch $bdah : dhc = 5 : 3$.

426. Ein Dreieck durch Linien, welche mit einer Seite parallel laufen, in n Theile zu theilen, die sich verhalten, wie u : v : w . . . : z.

Auflösung. Man theile ab nach dem vorgeschriebenen Verhältniß in d, e, f..., beschreibe über ab einen Halbkreis und ziehe die Normalen di, eh, fg...; aus a aber trage man die Sehnen ai, ah, ag... auf ab über,
Fig. 484. so sind n, p, r... die Punkte, durch welche man mit bc Parallelen zu ziehen hat, um damit das gegebene Dreieck nach dem gegebenen Verhältniß zu theilen.

Beweis. Aehnlich dem von Aufgabe 422.

427. Ein Dreieck durch Linien, welche mit einer gegebenen Richtung h′g′ parallel laufen, in n gleiche Theile zu theilen.

1. Auflösung. Man theile mn in die verlangte An-
Fig. 485. zahl gleicher Theile a, d, h... l, ziehe durch die gegenliegende Spitze des Dreiecks eine Parallele go mit h′g′, beschreibe sowohl über mg, als auch über gn einen Halbkreis und ziehe die rechtwinklichen Ordinaten ab, de,... lp. Aus m trage man die Sehnen mb, me... und aus n die np, ni... auf mn über und ziehe durch c, f... q, k Parallelen mit go. Diese theilen das Dreieck, wie verlangt worden.

Beweis. Wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

2. Auflösung. Theile ac in n gleiche Theile, ziehe
Fig. 486. bg parallel g′h′ und qr, vw normal ac; trage cg aus c nach k, ag aus a nach v, ce aus c nach l, ah aus a nach i und ad aus a nach w.

Nun beschreibe man über kl, vi und vw Halbkreise; und ziehe durch deren Durchschnittspunkte auf ac Parallelen mit bg. Hierdurch wird das Dreieck abc, wie verlangt, getheilt.

Beweis. Nach vorigem leicht.

428. Ein Dreieck durch Linien, welche parallel einer gegebenen Richtung laufen, in n Theile zu theilen, die sich verhalten wie u : v... : z.

Auflösung. Nachdem man ac nach dem gegebenen Verhältniß getheilt hat, ist das weitere Verfahren wie bei der vorigen Aufgabe.

429. Ein Dreieck durch Linien, welche normal einer der Seiten sind, in n gleiche oder verhältnißgleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Die Operation ist von der bei den vorhergehenden Aufgaben nur darin unterschieden, daß man die Linie bg durch die Spitze normal auf die gegenliegende Seite zieht.

430. Ein Dreieck abc durch Transversalen aus einer Spitze c in n gleiche, oder auch verhältnißgleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Theile die Gegenseite ab in die verlangten Theile und ziehe aus c die Transversalen nach den Theilpunkten.

Beweis. Leicht.

431. Von einem gegebenen Dreieck $\frac{m}{p}$, seines Inhalts durch eine Transversale abzuschneiden.

Auflösung. Man theile die der Spitze, von welcher die Transversale ausgehen soll, gegenliegende Seite in p gleiche Theile (oder in Theile, die sich verhalten, wie m : p — m) und ziehe durch den mten Theil die Transversale.

Beweis. Leicht.

432. Ein Dreieck durch Linien, welche von einem, auf einer Seite gegebenen Punkt r ausgehen, in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile die Seite, worauf der gegebene Punkt liegt, in die bestimmte Anzahl gleicher Theile, ziehe cr und mit dieser Parallelen durch die äußersten Theilpunkte. Fig. 487.

Sind diese qs und mn, so trage man bs, so oft es angeht, von b nach c, und an gleichermaßen von a nach c. Man erhält dadurch unmittelbar die Punkte, in welchen die Grenzlinien aus r die Seiten des Dreiecks treffen.

Anmerkung. Trifft einer der Theilpunkte mit dem gegebenen zusammen, so ist rc eine der Grenzlinien und sämmtliche Stücke des Dreiecks bilden wieder Dreiecke.

433. Ein Dreieck abc durch Linien, welche in einem Punkte r einer Dreiecksseite zusammenlaufen, in n Theile zu theilen, die sich verhalten, wie q : r : s . . . z.

Auflösung. Man theile die Seite, auf welcher der Punkt r liegt, in die verhältnißgleichen Theile (in q, o, m . . .), verbinde r, c und ziehe durch m, o, q . . . Parallelen mit rc. Verbindet man dann die Durchschnitte s, p, n mit r, so sind diese Linien die verlangten Theillinien. Fig. 487.

Beweis. Für Aufgabe 432 und 433. Zieht man die Linien cm, co, cq . . ., so haben die dadurch entstehenden Dreiecke gleiche Höhe und deren Inhalte verhalten sich wie ihre Grundlinien. Das Dreieck arn aber ist gleich dem Dreieck acm; rcnp = mco, weil rcn = rcm und rco = rcp ist; u. s. w.

434. Ein Dreieck abc von einem innerhalb gegebenen Punkte p aus in n Theile zu theilen, die sich verhalten wie $\mu : \eta : \psi \ldots \omega$.

Auflösung. Man theile ac in l, m, q . . . s so, daß die Theile das gegebene Verhältniß haben, ziehe durch den gegebenen Punkt p und die der Seite ac gegenliegende Spitze b die Richtung bp; dann durch die Theilpunkte
Fig. 488. s, n, q . . . Parallelen mit bc und durch die, auf der andern Seite von br liegenden Punkte l, m . . . Parallelen mit ab.

Nun verbinde man p, c und p, a, ziehe durch die Durchschnitte s′ n′ q′. . . auf br Parallelen mit pc, durch l′ m′. . . hingegen Parallelen mit ap und aus den hierdurch erhaltenen Durchschnitten der Dreiecksseiten, nemlich aus q″, n″, s″ und m″, l″. . . Linien nach p, welches die verlangten Theillinien sind.

Beweis. Denkt man sich Transversalen aus der Spitze b nach den Theilpunkten l, m, . . . s, so stehen die Inhalte der dadurch erzeugten Dreiecke im Verhältniß ihrer Grundlinien, d. i. der Theile auf ac.

Es ist aber das Dreieck bps″ = cbs, weil, wenn cs″ gedacht wird, das Dreieck cbs = cbs′ ist; cbs′ und bps″ haben aber bs′s″ gemein, und s′s″c = ss″p.

Desgleichen ist s″pn″c = sbn weil, wenn man cn′ zieht, cbn = cbn′ und cbn gemeinschaftlich cbpn″ und abn′, cpn″ aber gleich cp′n ist; daher ist cbpn″ = cbn, und da auch bps″ = cbs, so muß cbpn″ = cbn und folglich s″pn″c = sbn sein.

Auch ist n″pq″ = nbq; denn zieht man cq′, so ist cbq = cbq′, cbpq″ und cpq′ haben aber cbp gemein und cpq″ = cpq′; daher ist cbpq″ = cbq, und weil cbpn″ = cbn, so muß auch n″p″q = nbq sein; u. s. w.

435. Ein Dreieck abc von einem innerhalb gelegenen Punkte p aus in n, z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen.

Fig. 489. 1. Auflösung. Man theile eine Seite ac in die verlangten gleichen Theile, ziehe die Richtung bp nach m und verbinde c und a mit p. Durch die äußersten Theilpunkte 1 und 4 lege man Parallelen 1, s mit bc und 4, q mit ab, ziehe st parallel ps und qr parallel pa, trage das Stück br, so oft es geht, auf ab und eben so das Stück bt auf bc, also bt = tu . . ., und ziehe die Theillinien pt u und pr.

Da aber noch Theillinien fehlten, welche nach ac schneiden, so hat man die Seite ab des Dreiecks zu verlängern, noch br in rv zu tragen, wv ‡ pa zu ziehen, um die

fehlende Theillinie pw zu erhalten. Jedes der Dreiecke oder Vierecke, deren Seiten aus p nach den Theilpunkten b, t, u, w, r laufen, ist gleich $\frac{1}{n}$, hier $\frac{1}{5}$ des gegebenen Dreiecks abc.

Beweis. Ist nach den vorhergehenden Aufgaben leicht zu finden.

Anmerkung. Sollten noch mehr Theilpunkte zu suchen sein, welche auf ac fallen würden, so darf man nur das Stück aw, so oft es angeht, weiter noch c zu tragen.

2. Auflösung. Man ziehe die Richtung cd nach l, am ╪ bc und bl ╪ ac, verbinde noch a, l und b, m; so ist das Dreieck acl gleich dem Dreieck abc = bcm. Da nun der gegebene Punkt d auf der Seite des Dreiecks acl liegt, so verfahre man nach Aufgabe 433, um den Theil dce = $\frac{1}{n}$, hier $\frac{1}{5}$ acl, abzuschneiden. Fig. 490.

Die Parallele f″f‴ schneidet über ab hinaus, daher würde das zweite Fünftel zum Theil in das anliegende Dreieck bcm fallen; man kann aber den Theilpunkt f noch durch diese Parallele bestimmen, wenn man nicht vorziehen sollte, ihn dadurch zu finden, daß man nach der beschriebenen Weise die Theile dcn, dno und dobf des Dreiecks bcm abschneidet und jeden gleich $\frac{1}{5}$ bcm = $\frac{1}{5}$ abc macht; wodurch sich die Scheidelinie df von dieser Seite her ergeben wird.

Sollte die Anzahl der verlangten Theile noch nicht vollzählig sein, so hätte man den Abstand des Theilpunktes, welcher von a aus zu äußerst auf ab liegt, bis zu dem, welcher auf derselben Linie zu äußerst von b aus liegt, noch in soviel gleiche Theile zu theilen, als an jener Anzahl fehlen, und würde so die übrigen Theillinien bestimmen.

Beweis. Ist dem vorigen ähnlich.

436. Ein Dreieck abc von einem Punkte d aus in n Theile zu theilen, die sich verhalten wie s : t : u : . . . z.

Auflösung. Theile ac in die bestimmten verhältnißgleichen Theile, ziehe die Transversalen br, bq, bp . . .; suche dann, nach Aufgabe 380, eine Linie dm″, die ein Dreieck am′m″ abschneidet, welches inhaltsgleich dem Dreieck abm ist, hierauf eine solche Linie dp″, die ein Dreieck ap′p″, = abp abschneidet u. s. w. Fig. 491.

Wenn die Theillinien den Punkt c überschreiten, so schneide von d aus an der Spitze b ein Dreieck br′r″ ab, welches gleich brc ist; wodurch nach und nach alle einzelne

Theile des gegebenen Dreiecks, die unter sich das bestimmte Verhältniß haben, gefunden werden.

Beweis. Wie bei Aufgabe 380.

437. Ein Dreieck in n gleiche Theile zu theilen, wovon jeder einen besondern Theilpunkt auf den Seiten des Dreiecks hat.

Auflösung. Man theile eine Seite ac in n, z. B.
Fig. 492 in fünf gleiche Theile in o, q, r, e, c und ziehe be, so ist das Dreieck bce $= \frac{1}{5}$ abc. Man hat also noch das Dreieck abe $= \frac{4}{5}$ abc; theilt man daher ab in vier gleiche Theile in m, n, g und zieht eg so ist abermals beg $= \frac{1}{4}$ abe $= \frac{1}{5}$ abc, und man hat noch das Dreieck age $= \frac{3}{5}$ abc.

Fährt man mit dieser Theilung fort, so daß man nun ae in drei gleiche Theile, dann ag in zwei theilt und die Verbindungslinien zieht; so erhält man die Dreiecke adf, dfg, dge, deren jedes, gleich $\frac{1}{n}$, hier gleich $\frac{1}{5}$ des gegebenen ist.

Beweis. Leicht.

438. Einen gegebenen Kreisabschnitt in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis nach 82.

439. Den vierten Theil einer Kreisebene in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis aus Aufgabe 19.

440. Den vierten Theil einer Kreisebene in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis aus Aufgabe 21.

441. Eine Kreisebene in n, z. B. in drei gleiche Theile zu theilen, so daß der Umfang eines jeden dieser Theile der Kreislinie gleich sei.

Auflösung. Theile den Durchmesser in n, hier drei
Fig. 493. gleiche Theile ad, dc, cb, beschreibe über ad, ac, bc und bd Halbkreise, wie die Figur angiebt, so sind die, durch diese Halbkreise begrenzten, Flächen die bedingungsgleichen Theile.

Beweis. Nennt man den Inhalt der gegebenen Kreisebene F und deren Peripherie P, so ist der Inhalt des Halbkreises bdn $= \frac{2}{9} . F$, weil

$$\text{bdn} : \tfrac{1}{2} F = \text{bd}_q : \text{ab}_q = 2^2 : 3^2, \text{ nach } 118.$$

Daher ist der Inhalt der Fläche zwischen den Halbkreisen abm, bnd und der Linie ad gleich

$$\tfrac{1}{2} F - \tfrac{2}{9} F = \tfrac{5}{18} F.$$

Ferner ist der Inhalt des Halbkreises apd $= \frac{1}{18}$ F,
denn apd : $\frac{1}{2}$ F $= ad_q : ab_q = 1^2 : 3^2$,
also der Flächenraum apdnbm gleich

$$\left(\tfrac{5}{18} + \tfrac{1}{18}\right) F = \tfrac{1}{3} F,$$

welches sich von den übrigen beiden Flächen ebenfalls erweisen läßt.

In Betreff der zweiten Bedingung ist die halbe Kreislinie apd gleich $\frac{1}{6}$ P, weil

$$apd : \tfrac{1}{2} P = ad : ab = 1 : 3, \text{ nach } 116,$$

die halbe Peripherie bnd $= \frac{1}{3}$ P
und die amb $= \frac{1}{2}$ P,
folglich die Umgrenzung apdnbm gleich

$$\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right) P = P$$

u. s. w.

Anmerkung. Die alten Geometer nannten die Figur, welche innerhalb des Kreises liegt und von den vier Halbkreisen begrenzt wird, Pelecoides (von πελεκυς). Ihr Flächenverhältniß zu dem des Kreises ist wie der des Abschnittes cd zu dem Durchmesser.

442. Ein Parallelogramm in n gleiche oder auch verhältnißgleiche Theile zu theilen, deren Theilungslinien mit einer Seite parallel laufen.

Auflösung. Man theile eine Seite des Parallelogramms, auf welche die Theillinien stoßen sollen, in die bedingte Anzahl gleicher, oder verhältnißgleicher Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit der anstoßenden Seite.

Beweis. Aus 42 oder 66.

443. Ein Parallelogramm durch Linien aus einer Ecke in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen ac, bd, theile ac in n (hier 3) gleiche Theile und lege durch die Theilpunkte g, h... Parallelen mit bd. Die Durchschnitte der letztern auf den Seiten des Parallelogramms sind Punkte der Theillinien bf, be.... Fig. 494.

Beweis. Zieht man bg, bh, dg und dh, so ist

$$\triangle cgb = ghb = hab$$

und

$$\triangle cgd = ghd = had,$$

und da die Höhenpunkte b und d gleichen Abstand von ac haben, so ist auch

$$cgb + cgd = ghb + ghd = hab + had = \tfrac{1}{3} abcd.$$

Auch ist das Dreieck gbd $=$ fbd,
daher cbg + cdg $=$ fbd $= \frac{1}{3}$ abcd, u. s. w.

444. Ein Parallelogramm abcd in n Theile von gleichem Inhalt zu theilen, so daß die Theillinien von einem Punkte x innerhalb des Parallelogramms ausgehen.

Auflösung. Man theile ad in n gleiche Theile, Fig. 495. ziehe durch die Theilpunkte e, g... die Parallelen ef, gh..., dann die Linien xe, xf, xh, xg... Nun mache man das Dreieck hxg gleich kxh, indem man gk parallel hx zieht; das Dreieck fxe gleich fxi, u. s. w.: so sind xk, xg, xi... die gesuchten Theillinien.

Beweis. $baef = fegh \ldots = \frac{1}{n}$ abcd, nach 64.

$\triangle hxk = hxg$, nach 42,

daher $dchxg - hxk = dchxg - hxg = cdgh = \frac{1}{n}$ abcd.

Desgleichen ist

$cdef = cdexf + efx = cdexf + fxi = 2 \cdot \frac{1}{n}$ abcd,

folglich auch $gxia = \frac{1}{n}$ abcd, u. s. w.

445. Ein Parallelogramm von einem Punkte einer Seitenlinie aus in n gleiche Theile zu theilen.

Fig. 496. Auflösung. Es sei x der gegebene Punkt und n gleich 5; so theile man die Seite, worauf x liegt, und deren Gegenseite in 5 gleiche Theile. Die Theilpunkte seien g, h, k, l und f, i, s, t.

Weil nun x links von h liegt, so muß eine Theillinie, welche die Stelle der Linie hi vertreten soll, oben rechts von i fallen.

Man ziehe daher xi, mit dieser parallel he und dann xe, so theilt letztere $\frac{2}{5}$ des Parallelogramms ab. Um diese $\frac{2}{5}$ von x aus zu halbiren, ziehe man ea und bx, theile ae in m in zwei gleiche Theile, ziehe mn parallel bx: so ist xn die Theillinie für die Hälften von abex, deren eine gleich $\frac{1}{5}$ abcd ist.

Der übrige Theil des Parallelogramms, nemlich xedc enthält noch $\frac{3}{5}$ des ganzen; daher theile man ed in drei gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte p, o Parallelen mit cx und noch die Theillinien xr und xq.

Beweis. Da $abih = \frac{2}{5}$ abcd und das Dreieck $hux = eui$, so ist $abex = \frac{2}{5}$ abcd. Denkt man xm und bm gezogen, so hat man

$emx + ebm = amx + amb = \frac{1}{5}$ abcd;

und weil $nmb = nmx$,

auch $exnb = axn = \frac{1}{5}$abcd.

Auf gleiche Weise fährt man fort zu beweisen, daß
$\triangle xdr = xrcq = xqe = \frac{1}{5}$ abcd ist.

446. Ein gegebenes Parallelogramm durch Linien, welche von drei bestimmten Punkten m, n, o auf einer seiner Seiten ausgehen, in vier Theile zu theilen, die sich verhalten wie u, v, w, x, z. B. wie 6 : 5 : 3 : 2.

Auflösung. Man theile ad nach dem gegebenen Verhältniß in e, g, l und ziehe die Parallelen ef, gh, li mit einer anliegenden Seite ab. Da man durch diese Parallelen die Theilung des Parallelogramms nach dem bestimmten Verhältniß bewirkt hat, so ist die weitere Operation noch dahin zu richten, daß man diese Theillinien auf die gegebenen Punkte übertrage. Fig. 497.

Zu diesem Zweck halbire man ef in q und ziehe die Richtung mq bis m'; eben so halbire man gh in r und ziehe nn'. Die Theillinie aus o wäre demnach ok; es schneiden sich aber ok und nn' in r', weshalb man das Dreieck kn'r', welches beide Theile gemein haben, in or'o' überzutragen hat. Um dieses zu thun ziehe man ko' parallel on' und noch oo', so ist letztere Linie die richtige Theilungslinie.

Beweis. abef = abmm' = $\frac{6}{16}$ abcd, weil das Dreieck qfm' gleich qem ist.

Desgleichen ist egfh = mnm'n' = $\frac{5}{16}$ abcd, weil das Dreieck grn = hn'r;
daher nn'cd = ghcd = $(\frac{3}{16} + \frac{2}{16})$ abcd = $\frac{5}{16}$ abcd.

Da ferner das Dreieck osl = isk, so ist
ckod = cidl = $\frac{2}{16}$ abcd.

Das Dreieck n'r'k, welches in dem Theil cdok liegt, ist jedoch bereits dem Theil mnm'n' zugetheilt; es muß daher das gleiche Dreieck or'o' dem erst genannten Theil zugegeben werden, wodurch nun auch
doo'n'c = dcil = $\frac{2}{16}$ abcd
geworden ist.

Der übrige Theil des Parallelogramms, nemlich das Dreieck ono', wird dann noch der Differenz von abcd und den abgetheilten Stücken, also gleich $\frac{3}{16}$ abcd sein.

447. Von einem Trapez ein Stück gleich $\frac{\eta}{\mu}$, z. B. $\frac{4}{7}$ des Inhalts abzuschneiden, so daß die Scheidelinie mit einer parallelen Seite gleich läuft.

1. Auflösung. Man ziehe or parallel pn, beschreibe über mn einen Halbkreis, mache nu gleich nr und fälle die Normale ut. Theile dann tm in μ gleiche Theile und Fig. 498.

nehme $st = \frac{\eta}{\mu} . tm$, errichte in s die Normale sv, mache $qn = nv$ und ziehe qa parallel pn.

Der Durchschnittspunkt a giebt den Theilpunkt für die Theilungslinie ab, wodurch $abop = \frac{\eta}{\mu} . mnop$ wird.

Beweis. Denkt man mo und np verlängert und x als Durchschnittspunkt, so ist

$\triangle mnx : pox = mn_q : po_q$,

weil aber $po_q = nr_q = nu_q = nt . mn$,

so hat man $mnx : pox = mn : nt$

und $mnx - pox : pox = mn - nt : nt$

oder A., $mnpo : pox = mt : nt$.

Ferner ist $\triangle bax : pox = ba_q : po_q$,

und weil $ba_q = nq_q = nv_q = ns . mn$

und $po_q = nt . mn$,

auch $bax : pox = ns : nt$;

daher $bax - pox : pox = ns - nt : nt$,

d. i. B. $bapo : pox = st : nt$.

Aus dieser und aus Proportion A., findet man

$mnop : bapo = mt : st$.

Da aber $st = \frac{\eta}{\mu} . mt$,

oder $mt : st = \mu : \eta$;

so ist $mnop : bapo = \mu : \eta$

oder $bapo = \frac{\eta}{\mu} . mnop$.

Fig. 499. 2. Auflösung. Man verwandle das Trapez mnop in ein Dreieck opq, mache $or = \frac{\eta}{\mu} . oq$; so ist das Dreieck $por = \frac{\eta}{\mu} . opq = \frac{\eta}{\mu} . opmn$.

Verwandelt man nun das Dreieck opq in ein gleichflächiges Trapez opba, welches mit ihm eine Seite op gemein hat, so ist durch letzteres die Aufgabe gelößt.

Beweis. Leicht.

448. Ein Trapez mnop in n gleiche Theile zu theilen, so daß die Theillinien die parallelen Seiten schneiden.

Fig. 500. Auflösung. Theile jede der parallelen Seiten in n gleiche Theile und verbinde die beziehlichen Theilpunkte beider Seiten.

Beweis. Ist oq die Höhe des Trapezes, so hat man

$$dnpc = \frac{1}{2}(dn + pc) \,.\, oq$$
$$bdca = \frac{1}{2}(bd + ac) \,.\, oq, \text{ u. s. w.,}$$

weil aber $dn = bd = bm$

und $pc = ac = ao$,

so ist $dnpc = bdca = bmao = \frac{1}{n} \,.\, mnop$.

449. Das Trapez abcd aus einem Eckpunkte der kleinern parallelen Seite in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 501.

Auflösung. Man mache be = cd, halbire ae in f und ziehe cf als verlangte Theillinie.

Beweis. Da be = cd gemacht worden, so ist bcde ein Parallelogramm und das Dreieck $bec = \frac{1}{2} bcde$; auch ist das Dreieck $fed = \frac{1}{2} aed$.

Nun ist $\triangle fec = fed = \frac{1}{2} aed$

$\triangle bec = \frac{1}{2} bcde$,

folglich $fec + bec = \frac{1}{2}(aed + bcde) = \frac{1}{2} abcd$.

450. Es soll die Theillinie von einem Eckpunkt an der größern Seite ausgehen.

Auflösung. Man mache wieder be = cd und halbire ae in f. Nun ziehe man die Diagonale ac, fg ‡ ac, und ag als Theillinie. Fig. 501.

Beweis. Das Dreieck $bec = dec = \frac{1}{2} bcde$,

$fed = fec = \frac{1}{2} afd$;

also $bfc = \frac{1}{2} abcd$.

Es ist aber $\triangle afc = acg$,

daher $afm = cgm$,

folglich auch $\triangle abg = \frac{1}{2} abcd$.

451. Ein Trapez mnop dergestalt durch Linien, welche die parallelen Seiten schneiden, zu theilen, daß sich die Theile verhalten wie $\mu : \eta : \chi : \ldots \omega$. Fig. 500.

Auflösung. Man verfahre nach Aufg. 448, theile jedoch die Seiten in die gegebenen verhältnißgleichen Theile.

Beweis. $pcnd = \frac{1}{2}(pc + nd) \,.\, oq$

$cadb = \frac{1}{2}(ca + bd)\, oq$, u. s. w.

weil aber $nd : bd = \mu : \eta$

und auch $pc : ca = \mu : \eta$,

also $nd \,.\, \eta = bd \,.\, \mu$

und $pc \,.\, \eta = ca \,.\, \mu$,

so ist $\frac{1}{2}(pc + nd)\, oq \,.\, \eta = \frac{1}{2}(ca + bd)\, oq \,.\, \mu$,

d. i. $pcnd : cabd = \mu : \eta$.

452. Ein Trapez in n gleiche Theile zu theilen, so daß die Theillinien mit den parallelen Seiten gleich laufen.

Fig. 502. 1. Auflösung. Man ziehe ag parallel cd, mache ae = da + bc und theile ae in n, z. B. in drei gleiche Theile.

Hierauf trage man $\frac{1}{n}$ ae in bh, halbire hg in f und errichte in b eine Normale xy; schneide letztere aus f mit einem Radius = fh in i und trage aus i nach k die Länge bc; endlich ziehe man km parallel ab und lm parallel bc: so ist das abgeschnittene Stück bclm = $\frac{1}{n}$ abcd, also hier $\frac{1}{3}$ des Trapezes.

Das weitere Verfahren, um einen Theil bcqr = $\frac{2}{n}$. abcd abzuschneiden, und dann einen nächsten = $\frac{3}{n}$. abcd u. s. f. ist Wiederholung der ersten Construction, wobei man nach einander bn = $\frac{2}{n}$. ae, bn′ = $\frac{3}{n}$. ae u. s. w. zu nehmen hat.

Beweis. Vergleiche man Aufgabe 447, so wird man finden, daß die vorliegende Aufgabe nur eine Erweiterung jener ist, und daß der Beweis auch jenen leicht zu begründen ist.

2. Auflösung. Obiges Verfahren kann noch folgendergestalt abgeändert werden: man beschreibe über ab einen
Fig. 503. Halbkreis, ziehe de ╪ bq, trage be als Sehne in bf und fälle die Normale fg. Die erhaltene Länge ag, theile man in n (hier drei) gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten Normalen und mache bl = bi, bk = bh...

Zieht man nun ln, km, ... parallel bc und durch die Durchschnittspunkte n, m... Parallelen mit ab; so sind diese die verlangten Theillinien.

Beweis. Dieser ist nach Aufgabe 447 leicht zu finden.

453. Ein neck mittelst einer Geraden $\mu\nu$ dergestalt zu theilen, daß das eine Stück einem gegebenen Rechteck gleich sei und die Gerade $\mu\nu$ mit einer bestimmten Richtung AT parallel laufe.

Auflösung. Man ziehe mit der gegebenen Richtung
Fig. 504. Parallelen durch die äußersten Ecken der Figur und verwandle, nach Aufgabe 407, das neck in ein gleichflächiges Rechteck von der Seite RT, gleich dem Abstande jener Parallelen.

Um dieses zu bewerkstelligen, ziehe man, der Bequemlichkeit wegen, beliebig RT normal AT und durch alle Ecken der Figur Parallelen mit AT; halbire jedes Stück der Vielecksseiten, welches zwischen zwei Parallelen liegt, in 1, 2, 3, 4 . . . : so sind die von 1 nach 1′, von 2 nach 2′ u. s. w. gedachten Linien die mittlern arithmetischen Proportionalen zwischen jedem Paar zunächst stehender Parallelen.

Diese Proportionalen trage man von R aus nach 1, 2, 3... auf RE, ziehe eine Richtung T1, welche $B\beta$ in k schneidet, kl ǂ T2, lm ǂ T3, . . .; so wird durch den letzten Durchschnittspunkt in p die Höhe Rp des Rechtecks bestimmt, so daß RT . Rp = Inhalt des gegebenen n ecks ist.

Auch sind einzeln die Rechtecke

$$TR \,.\, \beta k = \triangle ABb$$
$$TR \,.\, \chi l = \triangle ABb + BbGg$$
$$TR \,.\, \gamma m = \triangle ABb + BbGg + GgCc, \text{ u. s. w.}$$

Soll nun von der gegebenen Figur das gedachte Stück gleich einem Rechteck RT . b, abgeschnitten werden, so sieht man, daß wenn dieses Rechteck auf TR gestellt wird, die Theilungslinie $\mu\nu$ zwischen die Parallelen $C\gamma$ und $F\varphi$ fallen muß. Um diese Linie zu bestimmen, nehme man die Differenz $b - \gamma m = mt$, mache $\varphi r = mt$, halbire $\varphi\gamma$ in w und ziehe Ry parallel wr und $\gamma\eta$ parallel TR; mache ferner $\gamma K = Cc$, $Kd = \varphi L = Ff$, suche zu $\gamma\eta = Ty$ und zu γd die mittlere geometrische Proportionale γq, trage Kq in Ks und ziehe xs parallel KL.

Es ist dann γx der Abstand der, mit AT parallelen, Theilungslinie von dem Punkt γ; und das, zwischen A und der gefundenen Linie $\mu\nu$ liegende Stück des n ecks ist gleich dem Rechteck TRk′i′ oder gleich dem Theil, welcher abzuschneiden verlangt worden ist.

Beweis. Da diese Auflösung eine Verbindung mehrerer früher bewiesenen ist, so kann der Beweis aus jenen einzelnen leicht für das ganze Verfahren gefunden werden.

454. Ein Viereck abcd durch Linien, welche von einer Ecke b ausgehen, in n Theile zu theilen, die sich verhalten wie m′ : n′ : o′ : . . . w′, z. B. wie 3 : 2 : 5 : 4 : 2.

Auflösung. Man verwandle zuerst das Viereck in ein gleichflächiges Dreieck abf, so daß der Eckpunkt b Spitze des Dreiecks wird. Ziehe deshalb bd und mit ihr parallel cf und verbinde b, f. Theile nun af so, daß die Stücke das gegebene Verhältniß haben und ziehe aus b nach denjenigen Theilpunkten, die auf der Vierecksseite ad liegen, Fig. 505, und 506.

Linien; also in Fig. 505 die Linien bm, bn, in Fig. 506, die Linie bp.

Die übrigen Dreiecke, wie bno, bop... fallen zum Theil ganz oder theilweise außerhalb des Vierecks, sind daher in dieses überzutragen.

Von dem Dreieck bno liegt z. B. nur der Theil bnd n der gegebenen Figur; weshalb man, Fig. 505, oq parallel bd und dann bq zieht, und so das Dreieck bno in die inhaltsgleiche Figur bndq verwandelt. Auf gleiche Weise verfahre man in Bezug auf bpo, bon... Fig. 506, so wird nach und nach das Viereck in die verlangten Theile getheilt. Diese sind nemlich in Fig. 505, bam, bmn, bndq, bqr und brc; in Fig. 506, bap, bpdo′, bo′n′, bn′m′ und bm′c.

Beweis. Ist nach den dabei angewendeten frühern Aufgaben leicht zu führen; er bezieht sich hauptsächlich auf 42.

455. Ein Viereck von einem Punkte e aus, welcher auf einer der Seiten liegt, in n Theile zu theilen, die sich verhalten wie u, v, w.... z.

Auflösung. Man verwandle das gegebene Viereck in ein Dreieck abf, so daß die Seite, worauf der gegebene Punkt e liegt, in die Seite des Dreiecks falle, indem man
Fig. 507. bd, dann cf ╪ bd und noch bf zieht.

Nun theile man af in n Theile, die sich verhalten wie die gegebenen Verhältnißzahlen u, v... z, ziehe be und mit ihr Parallelen durch alle Theilpunkte. Wo diese Parallelen die Seiten des Vierecks (in m′ und p′) treffen, sind die Richtungen der Theillinien (em′ und ep′) bestimmt.

Wo hingegen die Parallelen zum Theil oder ganz außerhalb fallen, wie bei den Theilen ep′q′ und eq′v′, ist man genöthigt die außenliegenden Stücke in das Viereck zu übertragen. So ziehe man deshalb ec, damit parallel q′q″ und v′v″ und dann die Theillinien eq″ und ev″.

Beweis. Nach den vorhergehenden Aufgaben.

456. Ein Viereck von einem Punkt e innerhalb in n Theile zu theilen, die sich verhalten, wie $\mu : \eta : \nu \ldots : \omega$.

Fig. 508. 1. Auflösung. Verwandle das Viereck in ein inhaltsgleiches Dreieck abf, theile eine der Dreiecksseiten, z. B. af, in solche Theile, die das gegebene Verhältniß haben, und ziehe die Richtung be und nach den Theilpunkten die Linien em, ep, eq... Legt man nun bm′ parallel em und verbindet em′, so ist abem′ einer der gesuchten Theile. Auf gleiche Weise erhält man den zweiten Theil m′p′e. Ein dritter Theil würde sich in p′q′e eben so ergeben, wenn nicht das Dreieck deq′ zum Theil außerhalb der Figur fiele. Um

diesen noch dem innenliegenden Dreieck p'de hinzuzufügen, ziehe man q'q'' parallel de bis zur Verlängerung von dc, wodurch das Dreieck deq' in das deq'' verwandelt wird. Da aber auch von letzterm noch ein Stück cxq'' außerhalb liegt, so ziehe man q''q''' parallel ec und dann eq'''. Durch eq''' wird ein Theil, welcher der letzte der gegebenen ist, in dem Viereck abgetheilt, so daß für den vorletzten Theil das Dreieck ebq''' übrig bleibt.

Beweis. Nach den vorgehenden Aufgaben.

2. Auflösung. Man verwandle wieder das Viereck abcd in ein Dreieck abf, und theile es nach Aufgabe 434, in die verlangten verhältnißgleichen Theile, deren Ecken in e zusammentreffen. Fig. 509.

Von diesen Theilen liegen nur die bem, mepa und peq ganz in dem Viereck; dagegen von denen, die von den Theillinien es, et, ev begrenzt werden, nur Stücke in das Viereck fallen. Um das Dreieck qes in das Viereck überzutragen, ziehe man ed, damit parallel ss' und die Theillinie es'. Um den folgenden Theil zu bestimmen, ziehe man vv' parallel eb und die Theillinie ev'; und um endlich die Grenzlinie et'' zu finden, hat man tt' parallel eb, t't'' parallel ce und et'' zu ziehen. In dem übrigen Stück es't'' ergiebt sich der letzte Theil des Vierecks von selbst.

Beweis. Aus dem Vorigen.

457. Ein neck in m gleiche oder solche Theile zu theilen, die ein gegebenes Verhältniß haben; und zwar so, daß alle Theile auf der Grenzlinie ab stehen. Fig. 510.

Auflösung. Man ziehe aus a Diagonalen nach den Ecken der Figur und mit diesen fg ∦ ae, bis sie die verlängerte Seite de in g schneidet; gh ∦ ad bis zur Verlängerung von cd nach h; hi ∦ ac bis zum Durchschnitt i mit der Richtung bc. Man hat dadurch die gegebene Figur in das inhaltgleiche Dreieck aib verwandelt.

Nun theile ab in die verlangten n Theile; so wird das Dreieck aib durch Transversalen aus i nach den Theilpunkten n, m, l, k in verhältnißgleiche Theile, wie bestimmt worden, getheilt und die Construction damit fortzusetzen sein, diese Theile in die gegebene Figur überzutragen. Man ziehe deshalb aus c Transversalen nach den Theilpunkten n, m, l, k und nach a, und iw ∦ ck, ix ∦ cl, iy ∦ cm..., dann, durch die, auf der Richtung cd erhaltenen Durchschnitte w, x, y..., ws ∦ kd, rx ∦ ld, qy ∦ md...; verbinde s, r, q, o... mit k, l, m, n... und trage noch das Dreieck epo in das Viereck über. Das durch die

Linie np' abgeschnittene Stück np'Fa ist der letzte Theil des Vielecks.

Beweis. Den vorigen Beweisen analog.

458. Ein neck in zwei Theile zu theilen, die sich verhalten wie $\varrho : \sigma$; so daß ein in der Figur liegender Punkt p und eine Ecke A beiden Theilen zugänglich ist.

Auflösung. Man verwandle zuerst die Figur in ein gleichflächiges Dreieck epc, dessen Spitze in p liegt und
Fig. 511. dessen Gegenseite die Seite AF des necks aufnimmt. Man kann dabei folgendes Verfahren befolgen:

Man verlängere die Seiten FA, FE, ED und AB, ziehe pD, pE, pF . . . nach den Ecken der Figur, und bC ‡ pD, aC ‡ pB, ac ‡ pA; desgleichen bd ‡ pE und de ‡ pF: so erhält man die Durchschnitte c und e auf der Richtung AF als Ecken des gesuchten gleichflächigen Dreiecks ecp.

In diesem schneide man von A aus ein Dreieck Apm ab, welches gleich ist $\frac{\varrho}{\sigma}$. Man suche nemlich zu σ, ϱ und der Grundlinie ce des Dreiecks die vierte Proportionale und trage sie in Am: so ist diese die Grundlinie des abzuschneidenden Theils. Läge dieses abgetheilte Dreieck ganz in dem neck, so wäre die Aufgabe gelößt. So hat man aber das außerhalb liegende Stück Fmm' noch in das neck überzutragen.

Man ziehe deshalb mn parallel pF bis an die Verlängerung von FE und dann no parallel pE. Der Durchschnitt o bestimmt die Richtung der Grenzlinie po, so daß durch Ap und po die verlangte Theilung bewirkt ist.

Anmerkung. Man sieht aus den vorstehenden Aufgaben, daß das Verfahren bei Lösung der verschiedenartigen Fälle im Wesentlichen nicht verschieden ist. Es kommt immer nur darauf an die allgemeinen einfachen Constructionen der Aufgaben 380 bis 383 dem gegebenen Fall gehörig anzupassen.

Auch sind die Auflösungen in den meisten Fällen dieselben; die Verhältnißzahlen der Theile mögen verschieden oder gleich sein.

Nachstehende Aufgaben können nicht eigentlich zu der Theilung von Figuren, welche im Praktischen ihre häufige Anwendung findet, gerechnet werden, sind aber zur Uebung im Erfinden und zu Entwickelung der Beweise brauchbar.

459. Zwei gegebene Quadrate a'o'n'n'' und f'm'o''m'' so zu zerschneiden, daß sich aus den Stücken wieder ein Quadrat bilden läßt. Fig. 512, A, B, C.

Auflösung. Man mache n'e' gleich m'o'', ziehe e'a' und errichte e'p' normal a'e'. Mache ferner m'c' = p'o' und ziehe c'f'. Diese Stücke, nach Fig. 512, C. zusammengesetzt geben das Quadrat abfe.

Setzt man die gegebenen Quadrate nach Fig. 512, B. an einander, zieht o'o'' und e'p' ‡ o'o'', so wird die Construction noch vereinfachter.

Beweis. Man weise nach, daß der Winkel fce + ecb = 2 R, folglich bcf eine Gerade sei; ferner, daß der Winkel epo + opf = 2 R, daher auch epf ein Gerade, und daß bf = ba = ea und der Winkel fba = bae = R sei.

Es folgt dann (weil bf = ae und ∟bfe + bae = 2R), daß bf ‡ ae, daher abfe ein Parallelogramm; und aus bf = ba und ∟fba = bae = R, daß abfe ein Quadrat ist.

460. Ein Quadrat durch gerade Linien so zu schneiden, daß die Stücke, gehörig zusammengesetzt, fünf gleiche Quadrate geben.

Auflösung. Man halbire die vier Seiten des Quadrats und verbinde die Theilpunkte mit den Ecken, wie die Figur angiebt. Die Zusammensetzung der einzelnen Quadrate ist leicht zu finden. Fig. 513

Beweis. Aus 27 u. a. m.

461. Ein Rechteck so zu schneiden, daß die Stücke zu einen Quadrat zusammen gelegt werden können.

Auflösung. Man suche zu den anstoßenden Seiten ab und bc die mittlere Proportionale, trage sie von b nach e; beschreibe mit be ein Quadrat befg, welches dem Rechteck abcd gleich sein wird. Fig. 514 bis 518.

Nun schneide man das Rechteck auf folgende Weise: wenn eine Ecke b des Quadrats in eine Ecke des Rechtecks, die andere Ecke e aber immer auf die lange Seite des Rechtecks gelegt wird und es fällt die dritte Ecke f des Quadrats auf die Ecke a des Rechtecks, wie in Fig. 514; so bilden die Stücke ein gleichschenkliches und zwei rechtwinkliche Dreiecke, I, II, III, die nach 1, 2, 3 zusammengepaßt ein Quadrat bilden.

Fig. 515, wenn die Ecken b des Quadrats und des Rechtecks in einander, f aber unterhalb ab fällt; so mache man af = bl, lk normal be. Die Stücke I, II, III, IV geben nach 1, 2, 3, 4 zusammen gelegt das Quadrat.

Fig. 516. Fällt f oberhalb der längern Seite ab, so mache man eq = ah und fälle die Normale qp, welche gleich hf ist.

Fig. 517. Mache el gleich bh und ziehe al.

Fig. 518. Trage bv, so oft es geht, auf ab von b nach a zu und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit ef. Den Rest ta setze man in es und ziehe sr normal be.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise läßt sich ein schiefwinkliches Parallelogramm in Stücke zerlegen, die zusammengesetzt einen Rhombus bilden. Man darf nur mit der Linie be als Seite einen Rhombus zeichnen, dessen Winkel ebg = abd ist, und wie bei dem Rechteck verfahren.

I. Anhang.

Aufgaben, die Bestimmung von größten und kleinsten Werthen betreffend *).

462. Es sind die Punkte f, h und eine Richtung mn gegeben, man soll auf letzterer einen dritten Punkt (g) finden, so daß ein Winkel, dessen Spitze in diesem Punkte liegt und dessen Schenkel durch f und h gehen, unter allen ein **Größtes** werde. Fig. 519.

---

*) Die Auflösung von Aufgaben, welche die Auffindung eines Größten oder eines Kleinsten zum Gegenstand haben, setzt eigentlich die Kenntniß der höhern Analysis voraus.

Es finden sich jedoch auch mehrere unter diesen Aufgaben, die auf dem einfachen Wege der Construction gelöst werden können.

Da deren Anzahl aber klein und die analytische Behandlung nur die Kenntniß voraussetzt „die Ableitungen einer Function zu finden"; so sind in diesem Anhange auch einige Aufgaben aufgenommen worden, an welchen die Auflösung durch Analysis gezeigt ist. Bei andern Aufgaben ist der constructionellen Lösung die analytische beigefügt.

Die Entscheidung, ob ein Ausdruck ein **Maximum** oder ein **Minimum**, oder auch keins von beiden ist, gründet sich auf folgende einfache Sätze:

1) Eine Function (fx) ist ein **Größtes** für denjenigen Werth x_1 der, in die erste Ableitung dfx gesetzt, diese Null macht; zugleich aber, in die zweite Ableitung d^2fx substituirt, dieser einen negativen Werth zutheilt.
2) Eine Function (fx) ist ein **Kleinstes** für denjenigen Werth x_1 der, in die erste Ableitung dfx gesetzt, bewirkt, daß diese in Null übergeht und der zweiten Ableitung d^2fx einen positiven Werth ertheilt, wenn der Werth x_1 statt x gesetzt wird.
3) Eine Function (fx) ist weder ein Größtes noch ein Kleinstes für einen Werth x_1 wenn die erste Ableitung nicht in Null übergeht, sondern irgend einen positiven oder negativen Werth annimmt, sobald dieser Werth x_1 für x in diese Ableitung gesetzt wird.
4) Geht für x_1, dfx als auch d^2fx in o über, erhält aber d^3fx, durch die Substitution von x_1 statt x, einen positiven oder negativen Werth, so wird fx für den Werth x_1 weder ein Größtes noch ein Kleinstes.
5) Gehen aber dfx, d^2fx und d^3fx durch x_1 in o über, so wird die Function fx ein Größtes für x_1 wenn dieser Werth in d^4fx gesetzt, dieses negativ macht, hingegen ein Kleinstes, wenn d^4fx durch ihn positiv wird, u. s. w.

Auflösung. Man ziehe die Richtung hf, bis an die gegebene Richtung mn, beschreibe über ef einen Halbkreis, errichte in h eine Normale hd, ziehe de und trage die Länge de in eg, so ist der Winkel hgf ein Größtes.

Beweis. Man lege durch g, h und f einen Kreis, nehme einen beliebigen Punkt s auf mn an und ziehe hs, fs und fr.

Der Winkel hrf ist dann, nach 80, gleich hgf und, als äußerer Winkel, nach 22, immer größer als hsf. Dieses wird aber bei jedem andern Winkel, dessen Spitze auf mn liegt, und dessen Schenkel durch die Punkte h und f gehen, der Fall sein; folglich ist der Winkel hgf unter allen diesen der größte.

Fig. 520. 463. Es ist eine Richtung ab und außerhalb derselben sind zwei Punkte c, d gegeben; man soll auf ab einen dritten Punkt finden, so daß, wenn von ihm aus Linien nach c und d gezogen werden, deren Summe ein Kleinstes sei.

Auflösung. Fälle aus einem der gegebenen Punkte c eine Normale cf auf die Richtung ab, mache if = ic und ziehe fd. Letztere schneidet ab in dem gesuchten Punkte e, so daß ce + ed kleiner ist, als die Summe von je zwei andern Linien, die von irgend einem andern Punkte auf ab, vielleicht von h aus, nach den gegebenen beiden Punkten gezogen werden.

Beweis. Die Dreiecke cie und fie sind congruent, daher ist fe = ce, und $\alpha = \beta$.

Nun ist ce + de = fe + de = fd

und fd als Gerade die kürzeste Linie zwischen f und d, also kürzer als fh + hd und als jede andere gebrochene Linie; folglich ist ce + de ein Kleinstes.

Anmerkung. Auf analytischem Wege gelangt man folgendermaßen zu dem Resultate, daß ec + de ein Kleinstes wird, wenn der Winkel aec gleich bed genommen wird.

Setzt man ce = v, de = z, gi = c, ci = a, dg = b und ie = x, so ist

$$v^2 = a^2 + x^2$$

und

$$z^2 = b^2 + (c-x)^2.$$

Weil der Bedingung nach

$$v + z = \text{Minimum},$$

so muß $d(v+z) = 0$ sein. Ferner ist

$$\text{I. } d(v^2) = d(a^2+x^2)$$

$$2v\,dv = 2x\,dx$$

$$dv = \frac{x}{v} \cdot dx.$$

$$\text{II. } d(z^2) = d(b^2 + (c-x)^2)$$
$$2z\,dz = 2(c-x) \cdot d(c-x)$$
$$dz = -\frac{c-x}{z} \cdot dx$$

Daher $\frac{x}{v} \cdot dx - \frac{c-x}{z} \cdot dx = 0$

$$\frac{x}{v} - \frac{c-x}{z} = 0$$
$$\frac{x}{v} = \frac{c-x}{z}$$

d. i. $\frac{ie}{ce} = \frac{eg}{de}$

oder $\text{Cos} . \angle cea = \text{Cos} \angle deb.$

464. Unter allen Dreiecken auf der Grundlinie ab, die inhaltsgleich sind, deren Spitzen also in der Parallele mn liegen, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Man suche nach Anleitung der vorigen Aufgabe denjenigen Punkt (c′) auf mn, in welchem die Summe der Seiten (bc′ + ac′) ein Kleinstes wird; so ist dieser Punkt c′ die Spitze des gesuchten Dreiecks und Fig. 521.

$$(ab + bc' + ac') < (ab + bc + ac) < (ab + bc'' + ac'')$$

u. s. w.

Beweis. Dieser ist dem vorigen gleich, da die Aufgabe auf vorige zurückgeführt werden kann.

Anmerkung. Durch Analyse findet man, indem $c''e = b$, $ab = a$ und $ae = x$ gesetzt wird, das Resultat folgendermaßen:

Es sei c″ der noch unbestimmte Punkt, so hat man, wenn c″e normal ab,

$$ac'' = \sqrt{b^2 + x^2}$$
$$be = \sqrt{(a+x)^2 + b^2},$$

also ist der Umfang

$$U = a + \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{(a+x)^2 + b^2}$$

$$\text{und } d f(U) = \left(\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} + \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+b^2}}\right) dx = 0$$

$$(a+x)\sqrt{b^2+x^2} = -x\sqrt{(a+x)^2+b^2},$$

woraus man $a^2 + b^2 = -2ab^2x$

und zuletzt $\frac{a}{2} = -x$

findet.

Der negativen Bezeichnung nach hat man aber x entgegengesetzt, d. i. in der Richtung von a nach b zu nehmen, und so fällt die Normale c''e in die Mitte der Grundlinie ab und das bedingungsgleiche Dreieck ist ein gleichschenkliches.

Zugleich wird in diesem Dreieck der Winkel an der Spitze ein Maximum.

465. Die Punkte a und b und eine, mit der Richtung ab parallele Linie mn ihrer Lage nach sind gegeben.
Fig. 521. Es wird gefragt, welches der kürzeste Weg sei zwischen a und b, auf dem man mn berührt.

Auflösung. Man sieht leicht, daß diese Aufgabe mit der vorigen übereinstimmt und daß der kürzeste Weg in $ac' = c'b$ gefunden wird, wenn $ac' = c'b$ ist; oder wenn der Berührungspunkt c' über die Mitte von ab fällt.

466. Unter allen Dreiecken auf derselben Grundlinie, die gleichen Umfang haben, dasjenige zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Fig. 522. Auflösung. Es sei $mn = ad + bd = ac + bc$, also der Umfang beider Dreiecke gleich, so ist dasjenige gleichschenkliche Dreieck, dessen gleiche Seiten $= \frac{1}{2}mn$ gemacht werden, dem Inhalt nach, in Beziehung auf die Bedingung des gleichen Umfanges, ein Größtes.

Beweis. Zieht man eg parallel ab und verlängert ad bis sie eg schneidet, verbindet dann b,f; so ist

$$\angle ace = bac = bcf = abc,$$

also $ac + bc < af + bf$. Dieses widerspricht den Bedingungen; es müßte demnach die Spitze d einen geringern Abstand von ab haben, damit der Umfang gleich würde. Dieser Abstand wäre vielleicht h'. Dann ist aber $ab.h' < ab.h$ und die Bedingung des größten Inhaltes nicht erfüllt. Folglich ist nur das gleichschenkliche Dreieck abc bedingungsgleich.

Anmerkung. Analytisch behandelt würde man zu dem Resultate auf folgende Weise gelangen:

Man bezeichne den einen der Summanden von mn, oder eine der unbestimmten Seiten mit x, die Grundlinie mit b, den Inhalt mit Q und den Umfang mit s, so ist der andere Summand von $mn = s - b - x$ und, nach Geom.,

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{s(s-2b)(s-2x)(-s+2b+2x)}$$

$$\frac{(4Q)^2}{s^2-2bs} = (s-2x)(-s+2b+2x)$$

$$= 2bs - s^2 + 4sx - 4bx - 4x^2 = \text{Maximum.}$$

Also $(4s - 4b - 8x)\,dx = 0$

$s - b - 2x = 0$

und $x = \frac{1}{2}(s - b)$ die eine Seite des Dreiecks.

Daher $s - b - x = s - b - \frac{1}{2}(s + b) = \frac{1}{2}(s - b)$ die andere Seite. Das gesuchte Dreieck ist also gleichschenklich und jede der gleichen Seiten $= \frac{1}{2}(s - b) = \frac{1}{2}mn$.

467. Unter allen rechtwinklichen Dreiecken, die einerlei Hypotenuse = h haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Da man die Hypotenuse als Durchmesser eines Kreises betrachten kann, dessen Peripherie der geometrische Ort der Spitzen aller rechtwinklichen Dreiecke ist, welche diese Hypotenuse haben, so ist der Inhalt nothwendig ein Größtes, welches die größte Ordinate zur Höhe hat. Diese ist aber $= r = \frac{1}{2}h$ und das rechtwinkliche größte Dreieck das gleichschenkliche.

468. Unter allen Dreiecken, die einerlei Grundlinie ab und noch eine Seite gleich haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Inhalt ein Größtes ist. Fig. 523.

Auflösung. Man errichte in b eine Normale und schneide sie aus b mit einem Radius, gleich der andern gleichen Seite; so ist das rechtwinkliche Dreieck, dessen Catheten aus den gleichen Seiten bestehen, das größte, nemlich $\triangle abc > abc' > abc''$ ꝛc.

Beweis. Denn bei allen andern Dreiecken, wie abc', abc'', wo bc' = bc = bc'', sind die Höhen bd, bd' kleiner als bc, also auch $ab \cdot bd < ab \cdot bc$.

Anmerkung. Allgemein ist immer unter allen Dreiecken, die auf einerlei Sehnen stehen und zum gegenliegenden Winkel den zur Sehne gehörigen Peripheriewinkel haben, das gleichschenkliche das größte.

Unter denjenigen Dreiecken aber, die zwei Seiten beziehlich gleich haben, ist das Dreieck das größte, dessen eine gleiche Seite normal auf der andern steht.

469. Es ist die Summe der Seiten eines Dreiecks = s gegeben; man soll das Dreieck finden, dessen Inhalt Q ein Größtes sei.

Auflösung. Das Dreieck ist ein Größtes, wovon jede Seite $= \frac{1}{3}s$ ist, also das gleichseitige.

Anmerkung. Analytisch würde man bei der Untersuchung nachstehend verfahren.

Aus Geom. ist

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}$$

und weil $x+y+z = s$

$$\frac{16}{s}Q^2 = (x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

$$= (s-2z)(s-2y)(s-2x), \text{ ein Maximum.}$$

Daher, x constant genommen,

$$d(s-2z).(s-2y)(s-2x) + d(s-2y)(s-2z)(s-2x) = 0,$$

woraus $dz(s^2-2sy-2sx+4xy) = dy(-s^2+2sz+2sx-4zx)$

und $dy = \dfrac{(s^2-2sy-2sx+4xy)\,dz}{-s^2+2sz+2sx-4zx}$ folgt.

Es ist aber auch aus $x+y+z = s$

$$dy+dz = 0 \text{ und } dy = -dz$$

also $s^2-2sy-2sx+4xy = s^2-2sz-2sx+4xz$

$$2xy-sy = 2xz-sz$$

$$y(2x-s) = z(2x-s) \text{ oder } y = z$$

folglich $s-(y+z) = s-2z = x.$

Man hat daher für den Inhalt

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{s(s-2z)^2(4z-s)}$$

$$\frac{16Q^2}{s} = 8s^2z-20sz^2+16z^3-s^3 = 2s^2z-5sz^2+4z^3-\frac{s^3}{4}.$$

Daher ist ferner

$$2s^2dz-10sz\,dz+12z^2dz = 0$$

$$s^2-5sz+6z^2 = 0$$

$$z^2-\tfrac{5}{6}sz = -\tfrac{1}{6}s^2$$

woraus

$$z = \tfrac{5}{12}s \pm \tfrac{1}{12}s \text{ folgt.}$$

Die Werthe von z sind also $= \frac{1}{2}s$ oder $= \frac{1}{3}s$.

Der erste dieser Werthe würde $x = s-2z = s-s = 0$ machen, also ist $z = \frac{1}{3}s$, $y = \frac{1}{3}s$, $x = \frac{1}{3}s$, nemlich das gleichseitige Dreieck das größte.

470. Es sind zwei Seiten eines Dreiecks ihrer Größe nach gleich m und n, so daß $m < n$. Wie ist das Dreieck zu construiren, damit der m gegenliegende Winkel x ein Größtes sei.

Fig. 523. Auflösung. Man errichte in dem Endpunkt b der Seite m eine Normale und schneide sie aus dem andern Endpunkte a mit einem Radius = n, so ist der Winkel acb ein Größtes.

Beweis. Da die Seite ac constant, so kann sie als Radius eines Kreises qcr angesehen werden, der geometrischer Ort der Spitze des Winkels x ist, die Seite ac mag eine Lage haben, welche sie wolle.

Nun ist sin $\llcorner b : ac = \text{Sin.}\, x : ab$

also $$\text{Sin}\, b = \frac{ac}{ab} \cdot \text{Sin}\, x.$$

Da aber $\frac{ac}{ab}$ constant ist, so muß Sin x von Sin b abhängig und $\llcorner x$ ein Größtes sein, wenn Sin b ein Größtes ist. Sin b ist aber dann ein Größtes wenn $\llcorner b = R$, also Sin b = 1 ist.

471. Man soll einen gegebenen Winkel gab in zwei solche Theile bad und gad theilen, daß das Product $\text{Sin}^m \alpha \cdot \text{Sin}^n \beta$, d. i. $bc^m \cdot gh^n$, ein Größtes sei. Fig. 524.

Auflösung. Mit beliebigem Radius ziehe man aus a einen Bogen bpg, und aus b eine Normale bk auf ag. Nun suche man zu m+n, n−m und bk die vierte Proportionale, trage sie in kf, ziehe fp parallel ag, pq parallel bk und noch ap. Zieht man ad normal be, so theilt ad den gegebenen Winkel in die verlangten Theile.

Anmerkung. Analytisch würde man nachstehend zu verfahren haben:
man setze $ab = r$, $bc = x$ und $gh = y$,
also soll $x^m \cdot y^n$ ein Maximum sein.
Daher wird $d(x^m y^n) = m x^{m-1} \cdot y^n \cdot dx + n \cdot y^{n-1} \cdot x^m \cdot dy = 0$
$$(x^{m-1} \cdot y^{n-1})\,(my\,dx + nx\,dy) = 0$$
$$\text{I.,}\quad my\,dx = -\,nx\,dy.$$
Aus der Gleichung
$$d\text{arc} \cdot \text{Sin}\, x = 1 \cdot dx\,(1^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
folgt, wenn man statt 1 den Radius r setzt,
$$d\text{arc} \cdot bd = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \text{ und}$$
$$d\text{arc} \cdot dg = \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$
$$\text{also}\quad \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} + \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0,$$
$$\text{II.,}\quad \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = -\,\frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$
Verbindet man die Gleichungen I X II, so ergiebt sich
$$\frac{my}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{nx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$
$$\text{also III.,}\quad nx = \frac{my\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

In den ähnlichen Dreiecken ace und abg ist aber

$$ah : gh = ac : ce$$

und setzt man die zugehörigen Werthe

$$\sqrt{r^2 - y^2} : y = \sqrt{r^2 - x^2} : ce$$

$$\text{IV., } ce = \frac{y\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Vergleicht man IV mit III, so findet man

$$m . ce = nx$$

$$m . ce = n . bc.$$

Daher $ce : bc = n : m$

$$ce + bc : bc = n + m : m$$

$$ce - bc : bc = n - m : m,$$

also $\underbrace{ce + bc}_{be} : \underbrace{ce - bc}_{ep} = n + m : n - m.$

Ferner ist, weil $\triangle bke \backsim \triangle pqe$

$$be : ep = bk : pq,$$

folglich $bk : pq = n + m : n - m.$

472. Auf der Grundlinie cd sind n Dreiecke construirt, deren Spitzen alle in der, auf cd normalen, Linie af liegen, die von c einen Abstand $= b'$ hat. Man soll dasjenige Dreieck bestimmen, welches den größten Winkel an der Spitze hat.

Fig. 525.

Auflösung. Man verlängere ac nach e und mache ae = ac, beschreibe über de einen Halbkreis und lege die Spitze des gesuchten Dreiecks in den Durchschnittspunkt b der Normale mit der Peripherie.

Beweis. $\angle bce > gce$

$$\angle bce = cbd + bdc$$

$$\angle gce = cgd + gdc,$$

also $cbd + bdc > cgd + gdc$

$$- bdc = - bdc,$$

daher $cbd > cgd + gdc - bdc$

und da auch $bdc > gdc,$

so muß $cbd > cgd$ sein, und größer als jeder andere Winkel, dessen Spitze zwischen b und a liegt.

Ferner ist $\angle dba > dma$

$$\angle dba = dbc + cba$$

$$\angle dma = dmc + cma,$$

daher $dbc + cba > dmc + cma$

und $dbc > dmc + cma - cba;$

es ist aber $cba > cma,$

folglich $dbc > dmc$ und größer als jeder andere Winkel, dessen Spitze über b auf der Normale liegt.

Anmerkung. Analytisch findet man, wenn $ag = x$ und $cd = a$, $cg = \sqrt{b^2+x^2}$ und $gd = \sqrt{(a+b)^2+x^2}$.

Es ist aber $cd_q = cg_q + gd_q - 2gc \, . \, gd \, . \cos \llcorner cgd$, oder

$$a^2 = (b^2+x^2)+(a+b)^2+x^2-2\sqrt{b^2+x^2}.\sqrt{(a+b)^2+x^2}.\cos.cgd$$

$$\text{und } \cos cgd = \frac{b^2+x^2+(a+b)^2+x^2-a^2}{2\sqrt{b^2+x^2} \, . \, \sqrt{(a+b)^2+x^2}}.$$

Setzt man den Nenner $= 2z^{\frac{1}{2}}$, so hat man

$$\cos cgd = \frac{2b^2+2x^2+2ab}{2z^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2+x^2+ab}{z^{\frac{1}{2}}},$$

also $d \cos cgd$

$$= \left[d(b^2+x^2+ab) \, . \, z^{\frac{1}{2}} - d(z^{\frac{1}{2}})(b^2+x^2+ab)\right] : z.$$

Das Differential des Zählers ist $2xdx$,
das Differ. des Nenners

$$= \tfrac{1}{2}(z^{-\frac{1}{2}}) \left((a+b)^2+b^2+2x^2\right) 2xdx,$$

daher ist $d \text{ Cos } cgd =$

$$\left[2xdx.\sqrt{(b^2+x^2)\left((a+b)^2+x^2\right)} - \frac{\left[(a+b)^2+b^2+2x^2\right](b^2+x^2+ab)}{\sqrt{(b^2+x^2)\left((a+b)^2+x^2\right)}}.xdx\right]$$

$$:(b^2+x^2)\left((a+b)^2+x^2\right),$$

$$\left[2(b^2+x^2)\left((a+b)^2+x^2\right) - \left((a+b)^2+b^2+2x^2\right)(b^2+x^2+ab)\right] xdx = 0.$$

Löset man die Klammern auf, so wird

$$a^2x^2 = a^3b + a^2b^2$$

$$x^2 = ab + b^2 = (a+b)\,b,$$

d. i. $\quad ag_q = (cd + ac)\,ac$

also $\quad cd + ac : ag = ag : ac$

woraus die Construction hervorgeht, wenn man $ae = ac$ macht.

473. Der Umfang eines Parallelogramms sei $= 2u$ gegeben; man soll untersuchen, wie groß man die Seite ab und den Winkel α machen müsse, damit der Inhalt Q ein Größtes sei.

Auflösung. Man setze $ab = x$, $ac = y$, so ist Fig. 526.

$$ad = u - x \text{ und } cd = \sqrt{(u-x)^2-y^2};$$

daher $\quad Q = x \, . \, \sqrt{(u-x)^2-y^2} = z$

$$= \sqrt{u^2x^2-2ux^3+x^4-x^2y^2}$$

und $\quad z^2 = u^2x^2-2ux^3+x^4-x^2y^2.$

Nimmt man y constant, so ergiebt sich

$$2zdz = 2u^2xdx - 6ux^2dx + 4x^3dx - 2y^2xdx$$

$$\frac{2zdz}{dx} = 2u^2x - 6ux^2 + 4x^3 - 2y^2x = 0.$$

Nimmt man x constant, so erhält man

$$2zdz = -2x^2ydy$$

und $\frac{2zdz}{dy} = -2x^2y = 0.$

Da hiernach $y = 0$ ist, so muß die Normale cd in ad fallen und das Parallelogramm ein Rechteck sein, wenn die Figur den Bedingungen entsprechen soll.

Da ferner, wenn $y = 0$,

$$2x^2 - 3ux + u^2 = 0$$

und $$x^2 - \frac{3ux}{2} = -\frac{u^2}{2} \text{ wird;}$$

so ist $$x^2 - \frac{3ux}{2} + (\tfrac{3}{4}u)^2 = -\frac{u^2}{2} + (\tfrac{3}{4}u)^2 = \frac{u^2}{16}$$

$$x = \tfrac{3}{4}u \pm \tfrac{1}{4}u.$$

Wollte man $x = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}u$ nehmen, so würde $x = u$ sein, welches einen Widerspruch gäbe; es muß daher $x = \frac{1}{2}u$ oder $ad = ab$, folglich das Rechteck auch Quadrat sein, wenn der Inhalt ein Größtes sein soll.

474. Man soll das größte Viereck bestimmen, dessen Ecken in den Peripherien von vier gegebenen concentrischen Kreisen liegen.

Auflösung. Man lege durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt zwei normale Durchmesser und nehme auf diesen die Diagonalen des Vierecks so, daß die eine aus dem größten und kleinsten, die andere aus den beiden übrigen
Fig. 527. Halbmessern besteht; wodurch das Viereck mnop entsteht, welches unter der gegebenen Bedingung ein Größtes ist.

Beweis. Da die Diagonalen sich rechtwinklich schneiden, so ist das Viereck aus vier rechtwinklichen Dreiecken zusammengesetzt und daher dessen Inhalt

$$Q = \tfrac{1}{2}a.b + \tfrac{1}{2}b.d + \tfrac{1}{2}c.d + \tfrac{1}{2}a.c$$

unter a, b, c, d die Radien der Kreise der Ordnung nach lo, lm, ln, lp gedacht.

Wollte man die Diagonalen so zusammen setzen, daß die eine aus den Halbmessern $b + d$, die andere aus den $a + c$ bestände, so würde der Inhalt des Vierecks mn′p′o sein

$$Q' = \tfrac{1}{2}a.b + \tfrac{1}{2}b.c + \tfrac{1}{2}c.d + \tfrac{1}{2}a.d.$$

Diese Summe ist aber kleiner als die erste, weil

$\frac{1}{2}c(b-a) < \frac{1}{2}d(b-a)$, d. i. $\frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ad < \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}ac$ ist.

Bildete man aber die Diagonalen aus den Halbmessern so, daß die eine aus den Halbmessern a und b, die andere aus den c und d bestände, so hätte man das Viereck on″p″p′ und dessen Inhalt

$$Q'' = \tfrac{1}{2}a.c + \tfrac{1}{2}c.b + \tfrac{1}{2}b.d + \tfrac{1}{2}d.a;$$

auch diese Summe ist kleiner als die erste, weil $\frac{1}{2}a(d-b) < \frac{1}{2}c(d-b)$, d. i. $\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc < \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ab$ ist.

Aus der Zusammensetzung der Radien zu Diagonalen können nur die drei gedachten verschiedenen Vierecke entstehen, daher führt nur die erste Verbindung auf ein Größtes.

475. Es ist ein gleichschenkliches Dreieck abc gegeben; man soll eins dergleichen einschreiben, dessen Spitze auf der ungleichen Seite steht, und welches ein Größtes sei.

Auflösung. Man ziehe durch den Halbirungspunkt p der Normale cm eine Parallele mit ab und ergänze das Dreieck mqo als das gesuchte. Fig. 528.

Beweis. Wollte man annehmen, ein Dreieck q'o'm könnte größer sein, wenn die Höhe $\frac{1}{n}.pm$ zunähme, so hätte man

$$mp' = mp + \frac{1}{n}.pm = \frac{(n+1)\,pm}{n} = \frac{(n-1)\,pq}{n}.$$

Nun ist

$$\triangle qom : q'o'm = pq.pm : p'q'.p'm$$
$$= pq.pm : \frac{n-1}{n}.pq \times \frac{n+1}{n}.pm$$
$$= pq.pm : \frac{n^2-1}{n^2}pq.pm,$$

es ist also, weil $\frac{n^2-1}{n^2}$ ein ächter Bruch ist, das Dreieck q'o'm kleiner als das Dreieck qom.

Auf dieses Resultat würde jedes andere Dreieck führen, auch wenn man $mp' = mp - \frac{1}{n}.mp$ annähme, folglich ist das Dreieck qom ein Größtes.

Anmerkung. Durch Differentiale behandelt, würde sich die Rechnung, wie folgt, gestalten:

es sei cm = a, ma = b und mp = x

also $$pq = b - \frac{bx}{a}$$

und $$Q = x\left(b - \frac{bx}{a}\right) = bx - \frac{bx^2}{a} = z.$$

Nun ist $$b.dx - \frac{2bx.dx}{a} = dz$$

$$b - \frac{2bx}{a} = \frac{dz}{dx} = 0,$$

also $\frac{ab}{2b} = \frac{a}{2} = x = \frac{1}{2} . cm.$

und weil das zweite Differential $-\frac{2b}{a}$; so ist, wegen des negativen Zeichens, Q ein Größtes.

476. Man soll in ein gegebenes gleichseitiges Dreieck abc ein anderes gleichschenkliches beschreiben, dessen Spitze auf der Mitte einer Seite des erstern liegt, und dessen Inhalt Q ein Größtes sei.

Fig. 529. Auflösung. Diese ist mit der vorigen übereinstimmend.

Beweis. Da

$$\triangle def : de'f' = ef . hd : e'f' . \left(hd + \frac{1}{n} hd\right)$$
$$= ef . hd : \left(ef - \frac{1}{n} ef\right)\left(hd + \frac{1}{n} hd\right)$$
$$= ef . hd : ef . hd - \frac{1}{n^2} ef . hd,$$

so ergiebt sich der Inhalt des Dreiecks def > de'f' und bei weiter ausgedehnter Untersuchung auch größer als jedes andere solcher eingeschriebenen Dreiecke.

Anmerkung. Setzt man ab = a, bd = $\frac{1}{2}$ a, ah = x, und weil

$$ad : db = ah : he.$$

aus Geom. aber die Höhe ad des gleichseitigen Dreiecks $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ist; so hat man

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} a = x : \frac{x}{\sqrt{3}}$$

und für den Inhalt z des Dreiecks def

$$= \frac{x}{\sqrt{3}}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)$$
$$= \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$$

Es ist also $\frac{a . dx}{2} - \frac{2x . dx}{\sqrt{3}} = dz$

$$\frac{a}{2} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{dz}{dx} = 0,$$

also $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2x$

und $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$ = der halben Höhe.

Das eingeschriebene Dreieck muß also auch gleichseitig sein. Weil nun aber das zweite Differential $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ negativ ist, so ist das Dreieck def ein Größtes.

477. Es ist ein Kreis gegeben, man soll in diesen ein gleichschenkliches Dreieck einschreiben, welches seinem Inhalt und seinem Umfang nach ein Größtes ist.

Auflösung. Das eingeschriebene, gleichseitige Dreieck leistet das Verlangte. Fig. 530.

Beweis und analytische Untersuchung. Der Inhalt der eingeschriebenen gleichschenklichen Dreiecke verhält sich wie die Producte aus Grundlinie in Höhe und da mit der Ab- oder Zunahme der Linie ce auch die Grundlinie ab- oder zunimmt, so betrachte man ce als veränderliche Größe und setze

$$2r = a = 1;\ ce = x;\ \text{also}\ ac = a - x.$$

Dann ist $bc \cdot cd = ec \cdot ac$, nach 92,

und weil ac normal bd, also $bc = cd$ ist,

$$bc_q = (a-x)x = ax - x^2$$

$$bc = \sqrt{ax - x^2},$$

folglich $Q = \sqrt{ax-x^2} \times (a-x) = z$

$$a^3x - 3a^2x^2 + 3ax^3 - x^4 = z^2.$$

Differentirt man, so ist

$$a^3dx - 2.3a^2x.dx + 3.3ax^2.dx - 4x^3.dx = 2z.dz,$$

also $\frac{a^3 - 6a^2x + 9ax^2 - 4x^3}{2z} = \frac{dz}{dx} = 0$

und $a = 1$, hat man

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0,$$

worin $x = \frac{1}{4}$ eine Wurzel ist.

Für ab_q findet man $bc_q + ac_q = ax - x^2 + (a-x)^2$
$= a^2 - ax,$

also $ab = \sqrt{a^2 - ax} = \sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Für $bd = 2bc$ findet man $2\sqrt{ax - x^2} = 2\sqrt{x - x^2}$
$= 2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Das gesuchte Dreieck ist daher gleichseitig.

In Bezug auf die zweite Bedingung ist der Umfang des oben gefundenen Dreiecks $= 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Nimmt man an, der Punkt c eines andern Dreiecks fiele in e, so daß ab + ad ein Größtes wäre; so ergiebt sich der Umfang $1 + 1 + 0 = 2$, also kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Denkt man sich im Gegensatz, c fiele in den Mittelpunkt des Kreises, so daß bd ein Größtes würde, so hätte man $ab + ad + bd = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$, welches also auch kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ wäre.

Also wird der Umfang des gefundenen Dreiecks ein Größtes sein.

478. Innerhalb einer Winkelebene eam ist ein Punkt d gegeben; man soll durch diesen eine Richtung legen, die mit den Schenkeln des Winkels das möglich kleinste Dreieck abschneidet.

Fig. 394, A. Auflösung. Man lege durch den gegebenen Punkt eine Parallele cd mit ae, mache cm = ac und ziehe die Richtung md bis zum Durchschnitt mit dem andern Schenkel. Das Dreieck man ist das verlangte.

Beweis. Zieht man durch d beliebig bf und dann gm ∦ an, so ist

$$ac : cm = nd : dm$$

und weil ac = cm, auch nd = dm.

Das Dreieck dnf ≌ dgm, folglich ist dnf < dbm;

$$amdf = amdf,$$

daher $amdf + dnf < amdf + dbm$,

d. i. das Dreieck $amn < abf$.

Da dieses von jedem Dreieck erwiesen werden kann, welches durch eine andere durch d gelegte beliebige Richtung abgeschnitten wird, so ist das Dreieck amn ein Kleinstes.

479. Um einen gegebenen Kreisabschnitt ein Dreieck zu beschreiben, welches dem Inhalt nach ein Kleinstes ist.

Fig. 531. Auflösung. Man halbire den Kreisabschnitt durch eine Normale pd und lege an den Bogen zwei Tangenten; welche in einem Punkt d der Axe sich treffen und in dem Berührungspunkt halbirt werden. Das Dreieck cde ist ein Kleinstes.

Beweis. Zieht man dg ∦ ab und zwei andere Tangenten, die sich in einem Punkt g dieser Parallelen treffen und die erstern Tangenten in m und l schneiden; ferner ik durch die Berührungspunkte der erstern Tangenten, so hat man

1) in den ähnlichen Dreiecken cmh und mgd

$$cm : md = ch : gd,$$

es ist aber cm < md, weil di = ½ cd; daher ch < gd.

2) in den ähnlichen Dreiecken gdl und efl ist

$$el : dl = ef : gd,$$

weil aber $el > dl$, so ist auch $ef > gd$; daher um so mehr $ef > ch$. Nun ist aber $ce = eh + ch$ und $hf = eh + ef$; also $hf > ce$; folglich $hf . dp > ce . dp$.

480. Es sei die Summe zweier Rechtecke $ab . bd + gh . hf$ gegeben, so daß ab und gh als constante, die andern Factoren aber als veränderliche Größen zu betrachten sind; man soll untersuchen, wenn $bd . hf$ ein Größtes wird, ohne daß die Größe jener Summe sich ändert. Fig. 532.

Auflösung. Man setze $ab . x + gh . y = om . gh$, d. i. man bilde ein Rechteck $pm . om$, welches $pm = gh$ zur Höhe und die Summe der gegebenen Rechtecke zum Inhalt hat.

Es wird dann, wenn $mn = hf$ ist, das Rechteck pqmn $=$ efgh sein und dann

$$y . gh + x . ab = om . gh$$
$$- y . gh = - mn . gh,$$

also $$x . ab = no . gh,$$
oder $$x : no = gh : ab$$
und auch $$x . mn : no . mn = gh : ab$$
oder $$x . fh : no . mn = gh : ab.$$

Man sieht aber leicht ein, daß $x . gh$ ein Größtes werden muß, wenn $no . mn$ oder $no . fh$ ein Größtes wird, oder wenn $no = mn = fh$ ist.

Sonach wird $y . x$ oder $hf . bd$ ein Größtes, wenn

$$fh : bd = ab : gh$$

oder $$fh . gh = bd . ab,$$

d. i. wenn beide Rechtecke inhaltsgleich sind.

481. Eine gegebene Linie dergestalt in zwei Theile m und n zu theilen, daß $m^2 + m . n$ ein Kleinstes sei; und daß $m . n : n^2 = p : q$ werde.

Auflösung. Errichte die Normale ad und bestimme deren Länge so, daß sich $ad_q : ab_q = p : q$ verhalte.

Verbinde bd und ziehe ae normal bd und fälle noch aus e die Normale ec auf ab, so theilt diese die gegebene Linie in die verlangten Theile, nemlich ac und bc. Fig. 533

Beweis. Man hat, weil das Dreieck aeb rechtwinklich ist

$$ac : ec = ec : bc$$

d. i. $$ec_q = ac . bc.$$

Es ist aber auch $$ae_q = ac_q + ce_q,$$

also $$ae_q = ac_q + ac . bc = m^2 + m . n.$$

Der Ausdruck rechts wird ein Kleinstes, wenn ae_q ein Kleinstes wird, und dieses kann es nur dann sein, wenn ae normal bd ist.

Ferner ist $ad_q : ab_q = ec_q : bc_q$
oder $ad_q : ab_q = ac \,.\, bc : bc_q = m : n$,
folglich ist c der gesuchte Punkt.

Theilt man die gegebene Linie nach dem Verhältniß p : q, so ist c auch dadurch unmittelbar gefunden.

482. Eine gegebene Linie ab so zu theilen, daß das Rechteck, welches aus den beiden Theilen gebildet wird, ein Größtes sei.

Auflösung. Man halbire ab in c und bilde aus den beiden gleichen Theilen das Rechteck. Das Rechteck, welches den Bedingungen entspricht, ist also ein Quadrat.

Fig. 534. Beweis. Nimmt man an, daß m der Theilungspunkt sei und ac = bc; so ist

$$am = ac + cm;\ bm = ac - cm \text{ und}$$

$$am \,.\, bm = (ac + cm)(ac - cm) = ac_q - cm_q$$

das Rechteck. Der letzte Ausdruck ist aber nothwendig ein Größtes, wenn cm = 0 ist. Daher fällt der Punkt m auf c und $ac \,.\, bc = ac_q$ ist das größte Rechteck, welches aus zwei Summanden der Linie ab gebildet werden kann.

Ist also der Umfang von Rechtecken bekannt, so ist unter allen das gleichseitige (das Quadrat) das größte.

Anmerkung. Analytisch würde die Untersuchung sich, wie folgt, gestalten:

nennt man den einen Theil x, so ist, wenn ab = a, der andere Theil a — x, und der Inhalt des Rechtecks

$$Q = x \,.\, (a - x) = ax - x^2$$

also
$$\frac{d(ax - x^2)}{dx} = a - 2x$$

und
$$\frac{d^2(ax - x^2)}{dx^2} = -2.$$

Also ist $x = \frac{1}{2}a$ und wie aus dem negativen Zeichen des zweiten Differentials hervorgeht, ein Größtes. Das gesuchte Rechteck aber ein Quadrat.

483. Man soll ein Rechteck in einen Viertelkreis zeichnen, so daß zwei Seiten mit den Radien zusammenfallen, der Inhalt aber ein Größtes werde.

Fig. 535. Auflösung. Führt man die Untersuchung analytisch, setzt rad. = a, cd = x, so ist

$$ab : bd = bd : dg,$$

d. i. $$a - x : bd = bd : a + x,$$

also $bd_q = (a - x)(a + x)$
und $bd = \sqrt{a^2 - x^2}$.
Daher der Inhalt $Q = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = z$
$= \sqrt{a^2x^2 - x^4}$
und $a^2x^2 - x^4 = z^2$.

Differentiirt man, so ergiebt sich

$$2a^2x dx - 4x^3 dx = 2z dz$$

$$2a^2x - 4x^3 = \frac{2z dz}{dx}$$

$$2a^2x - 4x^3 = 0$$

$$a^2 = 2x^2$$

und $a\sqrt{\frac{1}{2}} = x$.

Es ist also $bd = \sqrt{2x^2 - x^2} = x = cd$
und das gesuchte Rechteck ein Quadrat; weil aber das zweite Differential $= -4x$, so ist jenes ein Größtes.

Anmerkung. Was hier von dem vierten Theile des Kreises gilt, findet auch für den ganzen Kreis Anwendung. Es ist nemlich das im Kreise eingeschriebene Quadrat das größte aller eingeschriebenen Rechtecke und hat zugleich unter allen den größten Umfang.

484. Zwei Seiten ac und bc eines Dreiecks abc so zu theilen, daß der untere Abschnitt der einen Seite, sich zum obern der andern verhalte wie jene Seite zu dieser, und daß zugleich die Gerade, welche die beiden Theilpunkte verbindet, ein Kleinstes sei.

Auflösung. Man ergänze das Dreieck zu einem Parallelogramm acbd, ziehe die Diagonale cd, fälle auf diese aus den Spitzen a und b die Normalen af und be und ziehe fy ╪ ac, ex ╪ bc; so sind x und y die gesuchten Theilpunkte und xy ein kleinstes. Fig. 536.

Beweis. Weil af ╪ be, so ist immer cf = de und man hat, weil auch

$$ax : de = ac : cd$$

und $\left.\begin{matrix} cf \\ de \end{matrix}\right\} : cy = cd : bc$,

also $ax : cy = ac : bc$
und daher auch $by : cx = bc : ac$.

Zieht man noch ae und bf, so ist auch afbe ein Parallelogramm, wie leicht nachzuweisen ist; folglich ist in den Dreiecken aex, fby

$$ae = bf, \angle aex = fby, \angle eax = bfy,$$

mithin sind diese congruent und sonach ist ex = by; folglich ist auch xy ╪ be oder af.

Nun sind aber be und af als Normalen die kürzesten Linien, welche aus a und b auf cd gezogen werden können; mithin ist auch die ihnen gleiche Verbindungslinie xy kürzer als jede andere solche Linie, die sich aus einer dergleichen Construction ergiebt, wo be und af parallel, aber nicht senkrecht, gezogen sind. Folglich ist xy ein Kleinstes.

485. Es sollen zwei Gegenseiten ab und cd eines Vierecks abcd nach den Bedingungen der vorigen Aufgabe getheilt werden.

Fig. 537. Auflösung. Man bilde durch Parallelen mit den Seiten ein Sechseck abcdefa, ziehe die Diagonalen bf und ce, welche nothwendig parallel sein werden, fälle aus a und d die Normalen ag, dh, ziehe gy ∦ ab, hx ∦ cd, so ist xy die gesuchte Verbindungslinie der bedingten Theilpunkte und ein Kleinstes.

Beweis. Dem vorigen ähnlich, indem xy normal bf und ce ist.

Anmerkung. Wäre ab ∦ cd, so würde xy durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen und normal ab und cd fallen.

486. Man soll in dem Dreieck abc einen Punkt (p) so bestimmen, daß die Summe seiner Verbindungslinien mit den Ecken ein Kleinstes werde.

Fig. 538. Auflösung. Suche zu bc und ac die Mittelpunkte m, n von Kreisen, in welchen diese Seiten Sehnen eines Winkels von $\frac{4}{3}$ R werden und ziehe durch diese Mittelpunkte und durch die Halbirungspunkte o und q jener Seiten Richtungen. Diese werden sich in dem gesuchten Punkte p schneiden.

Dasselbe Resultat erhält man einfach, wenn man, nachdem die Richtung mq gezogen ist, pq = mq macht, oder bp ∦ mc und pc ∦ bm zieht.

Beweis. Denkt man aus c einen Kreis beschrieben, dessen Radius cp ist, so muß immer pa + pb kleiner sein als die Summe zweier Linien, welche man aus a und b nach irgend einem andern Punkte, z. B. r der Peripherie, gezogen denkt, wenn pc + pa + pb ein Kleinstes sein soll. Dieses kann aber nur statt finden, wenn der Winkel apc gleich bpc ist. Da aber dieser Umstand auch bei den Winkeln apb und apc statt findet, so kann ap + bp + cp nur dann ein Kleinstes sein, wenn jeder der drei Winkel, die um p liegen, gleich $\frac{4}{3}$ R ist.

Dieses ist aber durch die Construction bewirkt worden, daher erfüllt die Construction die gegebenen Bedingungen.

487. Man soll in einem Dreieck einen Punkt (p) so bestimmen, daß, wenn man von ihm Verbindungslinien nach den Ecken zieht, die Summe der Quadrate dieser Linien ein Kleinstes sei.

Auflösung. Man ziehe eine Transversale cd aus einer Spitze des Dreiecks nach der Mitte der gegenliegenden Seite und bestimme auf dieser den Punkt p so, daß dp : pc = 1 : 2 werde. Fig. 539.

Beweis. Nach 48 und 49 ist

$$ap_q = ad_q + pd_q + 2 \,.\, ad \,.\, dm$$
$$bp_q = bd_q + pd_q - 2 \,.\, bd \,.\, dm$$

und weil ad = bd, so hat man

$$ap_q + bp_q = ad_q + bd_q + 2pd_q,$$

also auch $ap_q + bp_q + cp_q = ad_q + bd_q + 2pd_q + cp_q$.

Der Ausdruck rechts wird aber ein Kleinstes, wenn $2 \,.\, pd_q + cp_q$ ein solches wird; d. i. wenn $2 \,.\, pd = cp$.

Daher ist auch $ap_q + bp_q + cp_q$ ein Kleinstes.

488. In einem gegebenen Viereck abcd soll man einen Punkt (m) so bestimmen, daß die Summe der Quadrate der, nach den Ecken gezogenen, Verbindungslinien ein Kleinstes sei.

Auflösung. Man halbire jede Seite und verbinde die gegenliegenden Theilpunkte, so ist der Durchschnittspunkt der gesuchte. Fig. 540.

Beweis. Es ist $am_q + bm_q + cm_q + dm_q$
$$= 2ae_q + 2dg_q + 2em_q + 2gm_q.$$

Der Ausdruck rechts wird aber nothwendig ein Kleinstes, wenn $2em_q + 2gm_q$ ein solches wird, oder wenn em = gm ist. Folglich ist hier m der gesuchte Punkt.

Wollte man annehmen, es könne n der Punkt sein; so wird eine ähnliche Untersuchung dahin führen, daß sich zu obigen vier Summanden der linken Seite noch ein fünfter 4mn gesellte; wodurch ein Widerspruch entstehen würde.

Anmerkung. Zieht man eine beliebige Richtung und auf diese aus den Ecken einer gegebenen Figur Normalen, und es hat ein Punkt innerhalb der Figur eine solche Lage, daß sein Abstand von der gedachten Richtung das arithmetische Mittel zwischen allen jenen Normalen ist, so nennt man diesen Punkt den Mittelpunkt der mittlern Entfernungen (centre des moyennes distances).

In Bezug auf Polyeder spricht sich dieser Satz so aus: Mittelpunkt der mittlern Entfernung ist derjenige Punkt, dessen Abstand von einer beliebigen Ebene das arithmetische Mittel der Entfernungen der Ecken von dieser Ebene ist.

Er fällt in beiden Fällen mit dem Schwerpunkte zusammen. In den Figuren 512, 513 und 514 ist p und m der Punkt, der in solcher Beziehung zu dem n eck steht.

Beschreibt man aus diesem Punkte einen beliebigen Kreis, so ist dieser der geometrische Ort aller Punkte, bei welchen die Summe der Quadrate der, nach den Ecken gezogenen, Verbindungslinien constant ist.

Bei Polyedern findet dasselbe mit der Kugelfläche statt.

489. In einem gegebenen Fünfeck abcde einen Punkt m so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der fünf Verbindungslinien mit den Ecken ein Kleinstes sei.

Fig. 541. Auflösung. Man suche zuerst zu vier Eckpunkten abcd, nach der vorigen Aufgabe, den Punkt o, ziehe oe, theile oe in fünf gleiche Theile und nehme om $= \frac{1}{5}$ oe, so hat man in m den verlangten Punkt bestimmt.

Beweis. Nimmt man einen beliebigen Punkt n und zieht die Verbindungslinien mit den Ecken, so ist
$ao_q + bo_q + co_q + do_q = an_q + bn_q + cn_q + dn_q + en_q + 4on_q$.
Der Ausdruck rechts wird dann ein Kleinstes, wenn $en_q + 4on_q$ ein solches wird, nemlich wenn en und on einen gestreckten Winkel bilden, d. i, wenn der gesuchte Punkt in die Richtung oe fällt, folglich me $=$ 4om ist; u. s. w.

Anmerkung. Um diesen Punkt allgemein in einem n eck zu finden, muß man immer, wie schon aus dieser Aufgabe hervorgeht, von einem Viereck ausgehen; indem die Auffindung des Punktes in einem $(n+1)$ eck von der des n ecks abhängig ist.

490. In ein gegebenes Dreieck abc ein Rechteck zu beschreiben, welches ein Größtes ist.

Fig. 542. Auflösung. Halbirt man die Normale bd in k, zieht ef durch k parallel ac und ergänzt das Rechteck efgi, so ist dieses das gesuchte.

Beweis, ist synthetisch leicht zu führen; die analytische Untersuchung gestaltet sich auf folgende Weise:

Setzt man ac $=$ a, bd $=$ b, ig $=$ ef $=$ x, so ist

$$ac : bd = ef : bk$$

oder

$$a : b = x : bk$$

und

$$bk = \frac{bx}{a};$$

also

$$dk = b - \frac{bx}{a} = \frac{ab - bx}{a}.$$

Der Inhalt des Rechtecks ist dann

$$Q = x \cdot \frac{ab - bx}{a} = \frac{abx - bx^2}{a} = z.$$

Differentiirt man, so erhält man

$ab\,dx - 2.bx.dx = dz$, also $ab - 2bx = 0$,

folglich $x = \frac{1}{2}a = ig$

und weil $a : b = \frac{1}{2}a : bk$,

so ist auch $bk = \frac{1}{2}b$.

491. Man soll in einen gegebenen Kreis ein Rechteck beschreiben, welches ein Größtes ist, wenn man das Quadrat der einen Seite in die andere multiplizirt.

Auflösung. Man theile den Durchmesser ab in drei gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten die Normalen cd und fe und bilde das Parallelogramm adbe, welches das verlangte ist. Fig. 543.

Analytische Untersuchung. Man setze $ab = c$, $be = x$, $ae = y$, so ist $y^2 = c^2 - x^2$;

also $xy^2 = c^2x - x^3$.

Daß xy^2 ein Größtes ist, ergiebt sich aus dem negativen Werth des zweiten Differentials, nemlich:

$$d(xy^2) = c^2dx - 3x^2dx$$

$$\frac{d(xy^2)}{dx} = c^2 - 3x^2 = 0$$

$$\frac{d^2(xy^2)}{dx^2} = -6x.$$

Aus $c^2 - 3x^2 = 0$

findet man $x^2 = \frac{1}{3}c^2$, also $y^2 = c^2 - x^2 = \frac{2}{3}c^2$,

oder $x = c\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $y = c\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Da nun nach der ausgeführten Construction

$ac : ad = ad : ab$

oder $\frac{1}{3}c : x = x : c$,

d. i. $x^2 = \frac{1}{3}c^2$;

so ist die Auflösung richtig.

Anmerkung. Nach den Gesetzen der Statik verhalten sich die respectiven Festigkeiten gleich langer Balken, wie die Producte aus den Quadraten der Höhen in die Breiten der Querschnitte.

Demnach läßt sich vorstehende Auflösung auf die, für die Praxis wichtige, Aufgabe anwenden:

> einen runden Stamm so zu beschlagen, daß man einen Balken daraus erhält, welcher die stärkste Tragkraft gewährt, wenn er, wie gehörig, auf die hohe Kante gelegt wird.

492. Es ist der Inhalt = a des Höhenschnitts eines oben offenen Kastens gegeben (nemlich eines Rechtecks, dessen obere Seite nicht in Rechnung kommt); man soll fin-

den, welche Dimensionen man den Seiten geben muß, damit das wenigste Material verwendet werde.

Fig. 544. Auflösung. Der Bedingung nach soll $ac + cd + bd$ ein Kleinstes werden; man setze $cd = x$, $bd = y$, so ist $xy = a$, und weil $x + 2y$ ein Kleinstes sein soll,

$$d(x + 2y) = 0.$$

Es ergiebt sich daraus $2dy = -dx$
und aus $xy = a$

$$xdy + ydx = da = 0.$$

Substituirt man $\frac{a}{y}$ für x und $2dy$ für $-dx$, so ist

$$\frac{ady}{y} - 2ydy = 0,$$

also

$$x = \frac{a}{y} = 2y.$$

Man hat daher dem Kasten die doppelte Höhe zur Breite zu geben.

493. Der Querschnitt der vorigen Aufgabe sei ein Trapez, dessen gleiche Neigungswinkel $dbc = eam = \alpha$

Fig. 545. sind. Man soll für den Inhalt $= q$ das Verhältniß der Seiten bestimmen, so daß $ea + ab + bd$ ein Kleinstes werde.

Auflösung. Nimmt man $de = z$, $ab = x$ und $bd = y$ und setzt $x + 2y = 0$, so ist $dy = -\frac{1}{2} dx$, und weil $cd = y \cdot \text{Sin}\,\alpha$

$$q = \tfrac{1}{2}(z + x) \cdot y\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$dq = 0 = d\left(\frac{z + x}{2} \cdot y\,\text{Sin}\,\alpha\right).$$

Ferner ist $bc = y \cdot \text{Cos}\,\alpha$, also

$$z = x + 2bc = x + 2y \cdot \text{Cos}\,\alpha,$$

daher durch Substitution

$$d\left(\frac{2x + 2y \cdot \text{Cos}\,\alpha}{2} \cdot y\,\text{Sin}\,\alpha\right) = 0$$

und nun

$$(x + y\,\text{Cos}\,\alpha)\,\text{Sin}\,\alpha \cdot dy + y\,\text{Sin}\,\alpha\,(dx + dy\,\text{Cos}\,\alpha) = 0$$

löst man die Klammern auf und substituirt für dx dessen Werth $-2dy$, so ergiebt sich

$$(x\,\text{Sin}\,\alpha + 2y\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha - 2y\,\text{Sin}\,\alpha)\,dy = 0;$$

woraus $\quad x = 2y - 2y\,\text{Cos}\,\alpha$

und $\quad \frac{1}{2}x = y - y \cdot \text{Cos}\,\alpha = y - bc$ folgt.

494. In der Ebene eines rechten Winkels f'ag ist ein Punkt w gegeben. Man soll durch diesen eine Linie (gf') legen, welche als Hypotenuse des Dreiecks f'ag ein Kleinstes ist.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Parameter av über der Axe bg die Parabel adpk, mache ab $= \frac{1}{2}$ av und errichte in b die Normale bp. Aus b trage man $\frac{1}{2}$ vw nach c und beschreibe aus c mit dem Radius ac einen Kreis, welcher die Parabel in dem Punkt d schneidet. Dieser Punkt bestimmt die Richtung wd der Hypotenuse gf', in welcher sie ein Kleinstes ist. Fig. 546.

Analytische Untersuchung. Setzt man av $=$ b $=$ Parameter; vw $=$ a, uf' $=$ x, so ist

$$f'w = \sqrt{x^2 + b^2}$$

und weil das Dreieck f'uw $\backsim$ f'ag,

$$f'u : f'w = f'a : f'm,$$

oder $x : \sqrt{x^2+b^2} = a + x : f'g$,

also
$$f'g = \frac{a+x}{x} \cdot \sqrt{x^2+b^2}.$$

Da nun f'g ein Minimum sein soll,

so wird
$$d(fg) = d\left(\frac{a+x}{x} \cdot \sqrt{x^2+b^2}\right) = 0,$$

d. i.
$$-\frac{a}{x^2}\sqrt{x^2+b^2} + \frac{a+x}{\sqrt{x^2+b^2}} = 0$$

$$ax^2 + a \cdot b^2 = ax^2 + x^3$$

$$a \cdot b^2 = x^3$$

und
$$x = \sqrt[3]{a \cdot b^2}.$$

Verfährt man nach obiger Auflösung, um den Werth von x zu construiren, so erhält man x mittelbar in der Normale dm und diese ist $=$ fu, weil om $=$ ua.

Beweis. Aus der Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ergiebt sich für unsere Figur

$$dm_q = am \cdot av = am \cdot b,$$

also
$$am = \frac{x^2}{b}$$

und
$$bm = \frac{1}{2}b - \frac{x^2}{b}.$$

Zieht man cf parallel av, so ist cf $=$ bm

und
$$cd^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{x^2}{b}\right)^2$$

$$= -ax + \frac{a^2}{4} + \frac{x^4}{b^2} + \frac{b^2}{4}.$$

Als Radien sind aber die Linien cd und ca gleich

und $ca_2 = ab_2 + bc_2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}$,

folglich $\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = -ax + \frac{a^2}{4} + \frac{x^4}{b^2} + \frac{b^2}{4}$

$$\frac{x^4}{b^2} = ax$$

$$x^3 = a \cdot b^2$$

und zuletzt wie oben

$$x = \sqrt[3]{a \cdot b^2}.$$

II. Anhang.

Aufgaben ohne beigefügte Construction zu eigner Bearbeitung.

495. Die Lage eines Punktes zu bestimmen, von welchem aus gerade Linien nach drei gegebenen Punkten gezogen, mit einander Winkel bilden, die gleich sind zwei gegebenen Winkeln.

496. Es sind drei Punkte ihrer Lage nach gegeben; man soll durch einen vierten gegebenen Punkt eine Richtung so legen, daß die Entfernungen der normalen Projectionen der drei ersten Punkte auf dieser Richtung sich verhalten wie m : n.

497. Es sind vier Punkte in einerlei Richtung gegeben; man soll einen fünften Punkt finden, so daß dessen Verbindungslinien mit den erstern an dem letztern Punkt gleiche Winkel bilden.

498. Durch einen gegebenen Punkt A eine Gerade so zu ziehen, daß die aus zwei andern Punkten B und C, auf A gefällten Normalen gleich werden.

499. Es sind zwei Parallelen ihrer Lage nach und auf jeder ein Punkt gegeben. Man soll durch einen dritten gegebenen Punkt eine Gerade so ziehen, daß die Entfernungen der Durchschnittspunkte, dieser Geraden mit den beiden Parallelen, von den beiden ersten gegebenen Punkten sich verhalten wie o : p.

500. Die Grundlinie und zugehörige Höhe eines Dreiecks nebst dem Winkel, welchen letztere mit der einen Seite an der Spitze bildet, sind gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

501. Die Seite A eines Dreiecks und die Verhältnisse von dieser zu den Seiten B und C sind gegeben; man soll das Dreieck bilden.

502. Die Seite A eines Dreiecks, ein anliegender Winkel, und das Verhältniß der beiden andern Seiten sind gegeben, um damit das Dreieck zu zeichnen.

503. Nächst den in voriger Aufgabe gegebenen Stücken ist, anstatt des anliegenden Winkels, der A gegenliegende gegeben.*)

504. Zur Construction eines Dreiecks ist gegeben, eine Seite A, der gegenliegende Winkel α, und das Verhältniß der Linie A zu einer der andern Seiten B, oder

504. Die Seite A, ein Winkel β und das Verhältniß von A zu B; ferner

504 b. Die Seite A, der Winkel γ und das Verhältniß von A zu B.

506. Es soll ein Dreieck gebildet werden aus einer Seite A, einem anliegenden Winkel β und der Summe $\gamma + \frac{1}{2} \alpha$.

507. Aus einer Seite A, der Summe A + B und der Summe $\beta + \frac{1}{2} \alpha$, oder $\gamma + \frac{1}{2} \alpha$ soll das Dreieck construirt werden.

508. Die zu der Grundlinie A zugehörige Höhe h und das größere Segment auf der Seite A und die Differenz der anliegenden Winkel $\beta - \gamma$ sind gegeben, um damit das Dreieck zu bilden.

509. Zur Construction eines Dreiecks hat man den Winkel α, die Differenz der Seiten B — C und die Differenz der Projectionen dieser Seiten auf A.

510. Der Winkel α, die Differenz der Seiten B — C und das Verhältniß $\mu : \eta$ der Projectionen dieser Seiten auf A ist gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

511. Um ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu beschreiben, so daß die Spitzen des erstern auf den Seiten des andern liegen.

512. Eine Gerade L sei der Lage nach und eine zweite l der Lage und Größe nach gegeben. Man soll über l ein Dreieck von der Beschaffenheit bilden, daß seine Spitze in L falle und sein Umfang ein Minimum werde.

513. Aus der Differenz zweier Seiten und gegebener Diagonale das Rechteck zu construiren.

514. Aus der Differenz einer Diagonale und Seite und dem Winkel, den eine Seite mit der Diagonale bildet, das Rechteck zu bilden.

515. Aus der Summe der Diagonale und zweier Seiten und dem Winkel, den die Diagonale mit einer Seite macht, das Rechteck zu bilden.

---

*) In den folgenden Aufgaben ist die Bezeichnung der Seiten beziehlich den Winkeln immer so zu verstehen, daß der Seite A der Winkel α, der Seite B der Winkel β rc. gegenliegt.

516. Man soll in ein Quadrat ein Rechteck legen, welches einem gegebenen Rechteck ähnlich ist.

517. Mit der Summe der Seiten und einer Diagonale, nebst dem Winkel, welcher der Diagonale gegenliegt, den Rhombus zu zeichnen.

518. Mit der Höhe und einem der Winkel den Rhombus zu construiren.

519. Mit einer Höhe, einer Diagonale und einem Winkel den Rhombus zu construiren.

520. Aus den vier Seiten ein Trapez zu construiren.

521. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn die beiden Diagonalen und der Winkel, welcher der größern Diagonale gegenliegt, gegeben sind.

522. Dasselbe zu zeichnen, wenn nebst den Diagonalen der Winkel gegeben ist, welcher der kleinern gegenliegt.

523. Ein Parallelogramm zu construiren, wenn die größere Diagonale, deren Abstand von der gegenliegenden Winkelspitze, und der kleinere Winkel gegeben ist, den beide Diagonalen bilden.

524. Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einem gegebenen inhaltsgleich ist, so daß zwei Seiten doppelt so groß sind, als die des gegebenen.

525. Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches halb so groß ist als ein gegebenes, aber zwei doppelt so große Seiten hat, als letzteres.

526. Einem gegebenen Viereck A ein anderes B zu umschreiben, so daß seine Seiten durch die Ecken von A gehen, dasselbe aber einem dritten C ähnlich sei.

527. Von einem Viereck, in welchem zwei anstoßende Seiten gleich sind, sind die Winkel und der Umfang gegeben, man soll daraus das Viereck construiren.

528. Es sind eine Seite, ein anliegender und ein nicht anliegender Winkel gegeben, dabei noch das Verhältniß der drei übrigen Seiten; man soll das Viereck bilden und zwar

a) wenn die beiden Winkel an einer Seite,
b) wenn sie sich gegenliegen.

529. Ein Viereck zu zeichnen, wenn folgende Stücke gegeben sind, als: eine Seite und die Summe zweier andern Seiten, nebst den Winkeln. Diese Aufgabe begreift vier Fälle, nemlich

1) wenn die Seiten, welche die Summe bilden, anliegen
2) wenn sie gegenliegen; und zwar

a) wenn die Summe der, an der gegebenen Seite liegenden, Winkel $< 2R$, und

b) wenn sie $> 2R$ ist.

530. Zur Construction eines Vierecks sind drei Seiten und zwei gegenliegende Winkel gegeben.

531. Es ist gegeben eine Seite, die anliegenden Winkel und die beiden Diagonalen; man soll das Viereck zeichnen.

532. Eine Seite, ein anliegender und der anstoßende Winkel, nebst den beiden Diagonalen eines Vierecks sind gegeben; man soll das Viereck zeichnen.

533. Zwei gegenliegende Seiten eines Vierecks, eine Diagonale und die beiden Winkel, welche diese mit den gegebenen Seiten bildet, sind gegeben; man soll das Viereck construiren.

534. Ein Viereck zu construiren, wenn

a) eine Seite, die zwei nicht anliegenden Winkel und die beiden Diagonalen;

b) zwei gegenliegende Seiten, zwei gegenliegende Winkel und die Diagonale, welche durch deren Scheitel geht;

c) zwei gegenliegende Seiten, die beiden Diagonalen nebst ihrem Neigungswinkel;

d) zwei anliegende Winkel und die beiden Diagonalen nebst ihrem Neigungswinkel;

e) die vier Seiten und die Summe zweier Winkel gegeben sind.

535. Man soll ein Fünfeck abcde zeichnen, von welchem die Seite ab, die Diagonalen ad und bd, und die Winkel d und e gegeben sind. Dabei soll die Diagonale ad parallel der Seite bc und die Diagonale bd parallel ae liegen.

536. Desgleichen, wenn die Winkel a, b und e, die anstoßenden Seiten ab, bc und die Diagonale ad gegeben sind; und wenn die Diagonale ad die unbekannte ce in zwei Segmente theilen soll, welche sich verhalten wie die unbekannte Seite ae zur Diagonale ac.

537. Desgleichen, wenn die Summe der Seiten bc + cd, der von ihnen gebildete Winkel c, die Diagonalen bd, ad und be und ihr Neigungswinkel afb, (den Durchschnittspunkt mit f bezeichnet) gegeben sind; die Segmente bf und df sollen gleich sein.

538. Von einem Fünfeck abcde ist die Seite ab, der Winkel bae, der aed, die Diagonale ec, nebst den Abstän-

den der drei andern Winkelpunkte a, b und d von dieser Diagonale gegeben; man soll das Fünfeck zeichnen.

539. Desgleichen, wenn gegeben ist, die Seite ab, die Differenz der Seiten ae — ed, die Diagonale ac, der Winkel bae und die Bedingung, daß die beiden Diagonalen ad und bd mit der Seite ab ein gleichseitiges Dreieck, die Diagonale bd aber mit den Seiten bc und cd ein gleichschenkliches Dreieck bilden sollen.

540. Ferner ist zu Bildung eines Fünfecks gegeben; die Differenz ae — ed, die Summe der Seiten ab + bc + der Diagonale ac, die fünf Winkel am Umfang und die beiden Winkel, welche die Diagonale ac mit ae und cd bildet, nemlich ∟cae und acd.

541. Einen Kreis zu beschreiben, der seinen Mittelpunkt in der Peripherie eines gegebenen Kreises hat und der durch zwei Punkte geht.

542. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Richtung liegt, durch einen gegebenen Punkt geht und eine andere Richtung berührt.

543. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf einer Richtung liegt und der zwei andere, ihrer Lage nach ebenfalls bestimmte, Richtungen berührt.

544. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf einem Kreise liegt und der zwei Richtungen, die ihrer Lage nach gegen letztern Kreis gegeben sind, berührt.

545. Einen dergleichen zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Richtung liegt und der

a) einen gegebenen Kreis,

b) zwei gegebene Kreise

berührt.

546. Man soll einen Kreis zeichnen, von gegebenem Halbmesser, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Richtung liegt, welcher eine andere, ihrer Divergenz mit der erstern nach bestimmte, Richtung berührt.

547. Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu zeichnen, dessen Mittelpunkt in einer gegeben Richtung liegt, und der einen, der Lage und Größe nach gegebenen, Kreis berührt.

548. Einen solchen zu zeichnen, der bei obigen Bedingungen einen Kreis zum Ort des Mittelpunktes hat.

549. In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einem andern, der Größe und Lage nach gegebenen, Rechteck ähnlich ist und dessen Seiten mit denen des gegebenen parallel laufen.

550. Es ist ein Kreis und ein Dreieck, beide ihrer Größe und Lage nach gegeben; man soll in den Kreis ein Dreieck zeichnen, welches dem gegebenen ähnlich ist und dessen Seiten mit denen des andern parallel laufen.

551. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten mit den Seiten eines, der Lage nach gegebenen, Dreiecks parallel sind.

552. Um einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten auf den Seiten eines der Lage nach gegebenen Dreiecks senkrecht stehen.

553. Fället man aus irgend einem Punkte p der Peripherie des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises Normalen auf die Seiten des Dreiecks, so liegen immer die Fußpunkte dieser drei Normalen in einerlei Richtung. Man soll denjenigen Punkt p' finden, für welchen diese Richtung parallel mit einer gegebenen Geraden mn ist.

554. Es sind drei Kreise gegeben, die sich in einem Punkte schneiden; man soll durch diesen Punkt ein Gerade so ziehen, daß, wenn a, b, c ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte ab, bc der Geraden sich verhalten wie $\eta : \mu$.

555. Es sind drei Kreislinien K_1, K_2, K_3, deren Mittelpunkte C_1, C_2, C_3 sind, gegeben. Es sollen auf jeder dieser Kreislinien drei Punkte a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 und a_3, b_3, c_3 angegeben werden, so daß:

1) die Radien C_1a_1, C_2a_2, C_3a_3 oder ihre Verlängerungen sich in dem Schwerpunkte des Dreiecks $a_1\ a_2\ a_3$ schneiden; (man sehe die Anmerkung zu Aufgabe 488).
2) die Radien C_1b_1, C_2c_2, C_3c_3 oder ihre Verlängerungen durch den Mittelpunkt des in $b_1\ b_2\ b_3$ eingeschriebenen Kreises gehen, und
3) die Radien C_1c_1, C_2c_2, C_3c_3 auf c_2c_3, c_1c_3, c_1c_2 resp. senkrecht seien.

556. Ein Trapez abcd durch eine mit den parallelen Seiten gleichlaufende Gerade mn so zu theilen, daß der eine Theil abmn gleich dem Dreieck abc und der Theil mncd gleich dem Dreieck bcd werde.

557. Ein beliebiges Quadrat so zu zerschneiden, daß sich die Stücke in ein Rechteck zusammen legen lassen, welches eine gegebene Länge zur Seite hat.

558. Einen Rhombus so zu zerschneiden, daß die zusammengelegten Stücke ein Parallelogramm bilden, das mit dem Rhombus einen Winkel gleich und eine gegebene Seite hat.

559. Ein Parallelogramm so zu schneiden, daß sich die Stücke in ein nicht congruentes Parallelogramm legen lassen.

560. Ein gleichschenkliches Dreieck in ein inhaltgleiches gleichseitiges zu verwandeln.

561. Ein gleichschenkliches Dreieck, dessen ungleicher Winkel spitz ist, in ein rechtwinkliches gleichflächiges Dreieck zu verwandeln, welches jenen Winkel enthält.

562. Einen gegebenen Kreis durch concentrische Kreise in n gleiche oder verhältnißgleiche Theile zu theilen.

563. Einen gegebenen Kreis in mehrere gleiche oder verhältnißgleiche Theile zu theilen, so daß die Theillinien excentrische Kreise sind, die sämmtlich mit dem gegebenen Kreise einen Punkt gemein haben.

564. Ein Viereck durch Linien, die mit einer gegebenen Richtung parallel laufen in n verhältnißgleiche Theile zu theilen.

565. Ein Viereck durch Linien, die paarweise einen bestimmten Neigungswinkel haben, in n gleiche Theile zu theilen.

566. Ein Viereck durch Linien, welche von einem außerhalb gelegenen Punkte ausgehen, in n Theile zu theilen, wovon jeder das Doppelte des vorhergehenden ist.

567. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, die bei gegebenem Radius durch einen gegebenen Punkt gehen.

568. Den geometrischen Ort aller Kreise von gegebenem Halbmesser zu bestimmen, die einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berühren.

569. Die beiden geometrischen Orte für die Mittelpunkte aller Kreise zu finden, die, bei gegebenen Radien, eine der Lage nach bestimmte Richtung berühren.

570. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, die, bei gegebenen Radien eine bestimmte Entfernung von einem Punkte haben.

571. Die beiden geometrischen Orte für die Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, die bei gegebenem Radius eine, der Lage nach gegebene, Gerade für eine gegebene Länge schneiden.

572. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise zu finden, die, bei gegebenem Halbmesser, ei-

nen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis so schneiden, daß die gemeinschaftliche Sehne eine bestimmte Länge hat.

573. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise zu finden, die einen gegebenen Radius haben und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis rechtwinklich schneiden.

574. Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise rechtwinklich schneiden.

Leipzig, Druck von Hirschfeld.

In demselben Verlage ist erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Drobisch, M. M. W., Grundzüge der ebenen und körperlichen Trigonometrie, nach humoristischer Methode. Mit 2 Kupfertaf. gr. 8. (1825) 12 Gr.

Gregory, Olynthus, Mathematik für Praktiker, oder Sammlung von Grund- und Lehrsätzen, Regeln und Tafeln aus den verschiedenen Theilen der reinen und angewandten Mathematik, ein Hand- und Lehrbuch für technische Anstalten, für Feldmesser, Architekten, Mechaniker, Techniker u. s. w. Aus dem Englischen übersetzt von M. W. Drobisch, Professor zu Leipzig. 2. Aufl. Mit 3 Kupfertafeln und 227 Holzschnitten. gr. 8. br. (1828) 2 Thlr. 18 Gr.

Katechismus der Algebra zum Gebrauch in Schulen und zum Selbstunterricht, von Ernst v. Wolfersdorf. 8. br. (1824) 18 Gr.

Katechismus über den Gebrauch des Erdglobus, ein Hülfsmittel zur Erläuterung der interessantesten Sätze in Betreff der Gestalt unserer Erde, der Lage der verschiedenen Orte auf ihr, und des Wechsels der Jahres- und Tageszeiten. Von M. C. Steinau. Mit einem Kpfr. 8. br. 8 Gr.

Katechismus der Geometrie, enthaltend die Grundbegriffe dieser nützlichen Wissenschaft, zum Gebrauch für die Jugend. Aus dem Englischen übersetzt von August Thieme. Mit Holzschnitten. 8. broch. (1820) 12 Gr.

Katechismus der Licht- und Sehlehre, für junge deutsche Künstler verschiedener Gattung, nach dem Englischen bearbeitet von C. A. Nilson. Mit vielen Holzschnitten. 8. br. 8 Gr.

Muhlert, K. F., Anleitung zu dem Construiren der ersten geometrischen Figuren, Dreiecke, Parallelogramme, regulären Vielecke, architectonischen Glieder, Ovale, Eilinien, der jonischen Volete und der Ellipse, für den Schul- und Selbstunterricht, zu praktischen Arbeiten mit dem Lineal und Zirkel, und zu der Einleitung in die Geometrie. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. br. (1827) 12 Gr.

Derselbe, die Genesis der Kegelschnittlinien. Mit 2 Kupfertafeln. gr. 8. br. (1832) 8 Gr.

Staatliche Bibliothek Regensburg

Derselbe, die Kampylogrammik der Geometrie; in dem Kreise, der Cycloide, den Kegelschnittlinien, der Cissoide und der Konchoide neu bearbeitet und erweitert. Mit 7 Kupfertaf. gr. 8. (1831) 1 Thlr. 12 Gr.

Derselbe, die Perspective in der Glastafel- und der Grundlinienconstruction, wie auch in der Spiegelung auf der Wasserfläche; für Maler, Zeichner und Architecten, so wie für den Unterricht in der höhern Zeichnung in Lehranstalten. Mit 8 Kupfertafeln. gr. 4. br. (1830) 18 Gr.

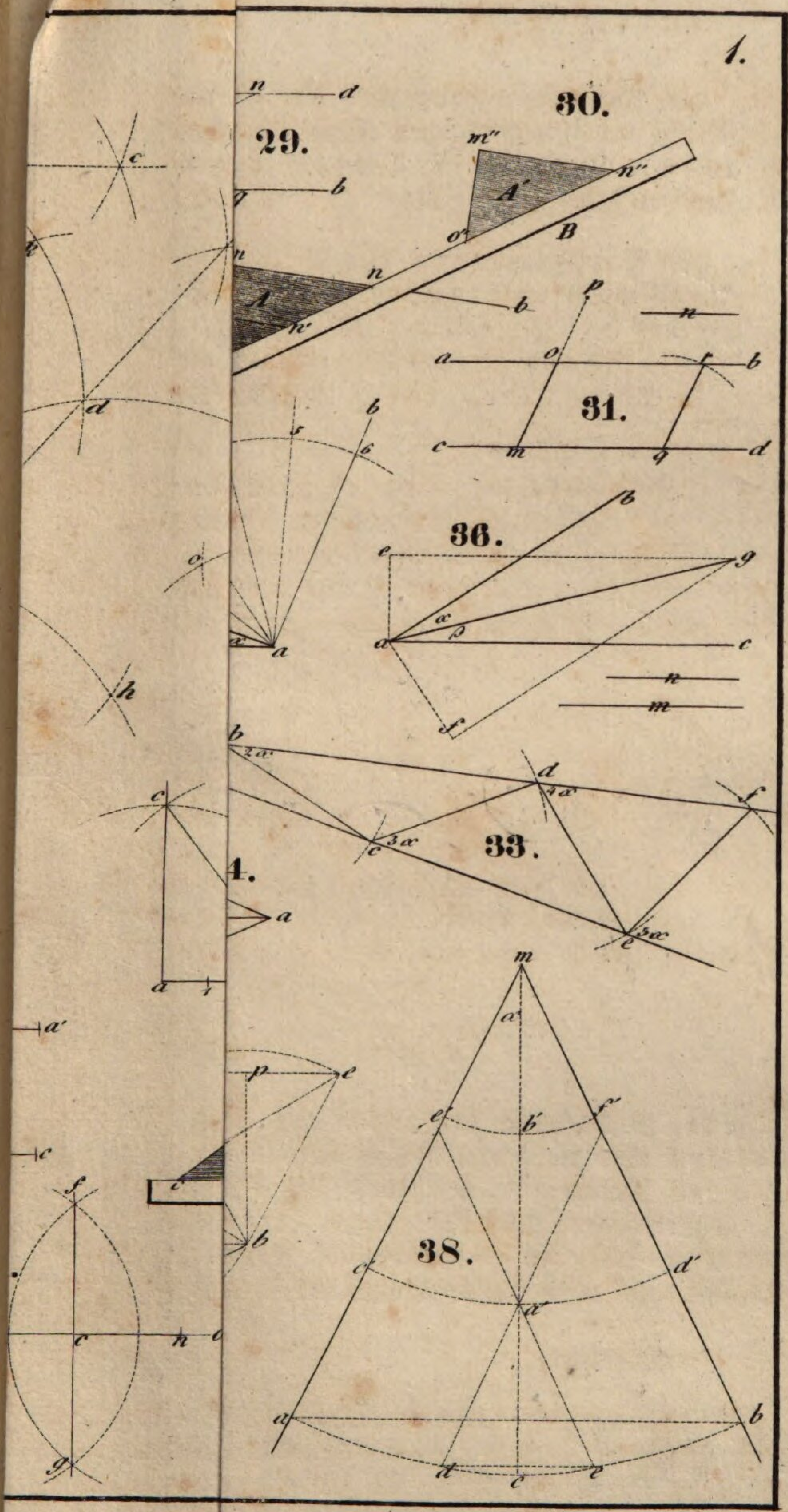
Derselbe, die Quadratzahlen nach ihren Eigenschaften, und in der Anwendung zur Berechnung rationaler Größen in der Mathematik dargestellt, und aus der Figur erläutert. Ein Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. Mit 2 Kupfertaf. gr. 8. br. (1829) 12 Gr.

Derselbe, Studienblätter für die Perspective in der Zeichnung, in landschaftlichen Darstellungen von Werken der Baukunst und ihrem Gegenbilde auf der spiegelnden, ruhigen Wasserfläche; auszuführen durch gegebene perspectivisch-katoptrische Construction, und begleitet von einer faßlichen, das Verfahren leitenden Unterweisung für den Selbstunterricht, so wie zu der Unterstützung des Lehrers. In 6 lithograph. Blättern. 4. br. (1833) 18 Gr.

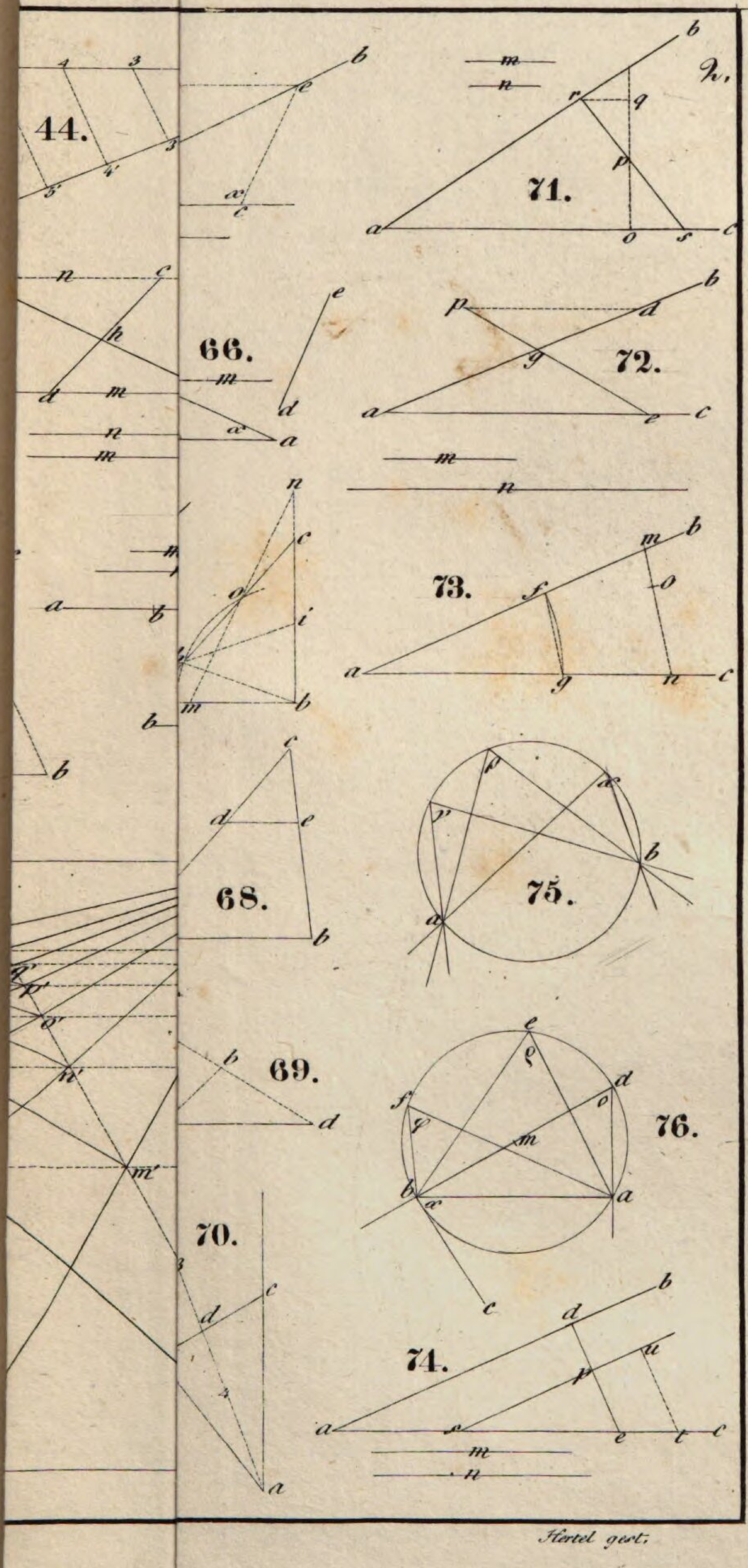
Allgemeine, wohlfeile Bilder-Bibel für die Katholiken oder die ganze heilige Schrift des alten und des neuen Testaments, mit mehr als 500 schönen in den Text eingedruckten Abbildungen. (Stereotyp-Pracht-Ausgabe.) Mit der Druckerlaubniß des hochwürdigen katholisch-geistlichen Consistoriums des Königr. Sachsen. 4 Thlr.
Erläuterungen dazu 12 Gr.

Allgemeine, wohlfeile Volks-Bilderbibel oder die ganze heilige Schrift des alten und neuen Testaments, mit mehr als 500 schönen, in den Text eingedruckten Abbildungen. (Stereot.-Pracht-Ausg.) 3 Thlr. 20 Gr.

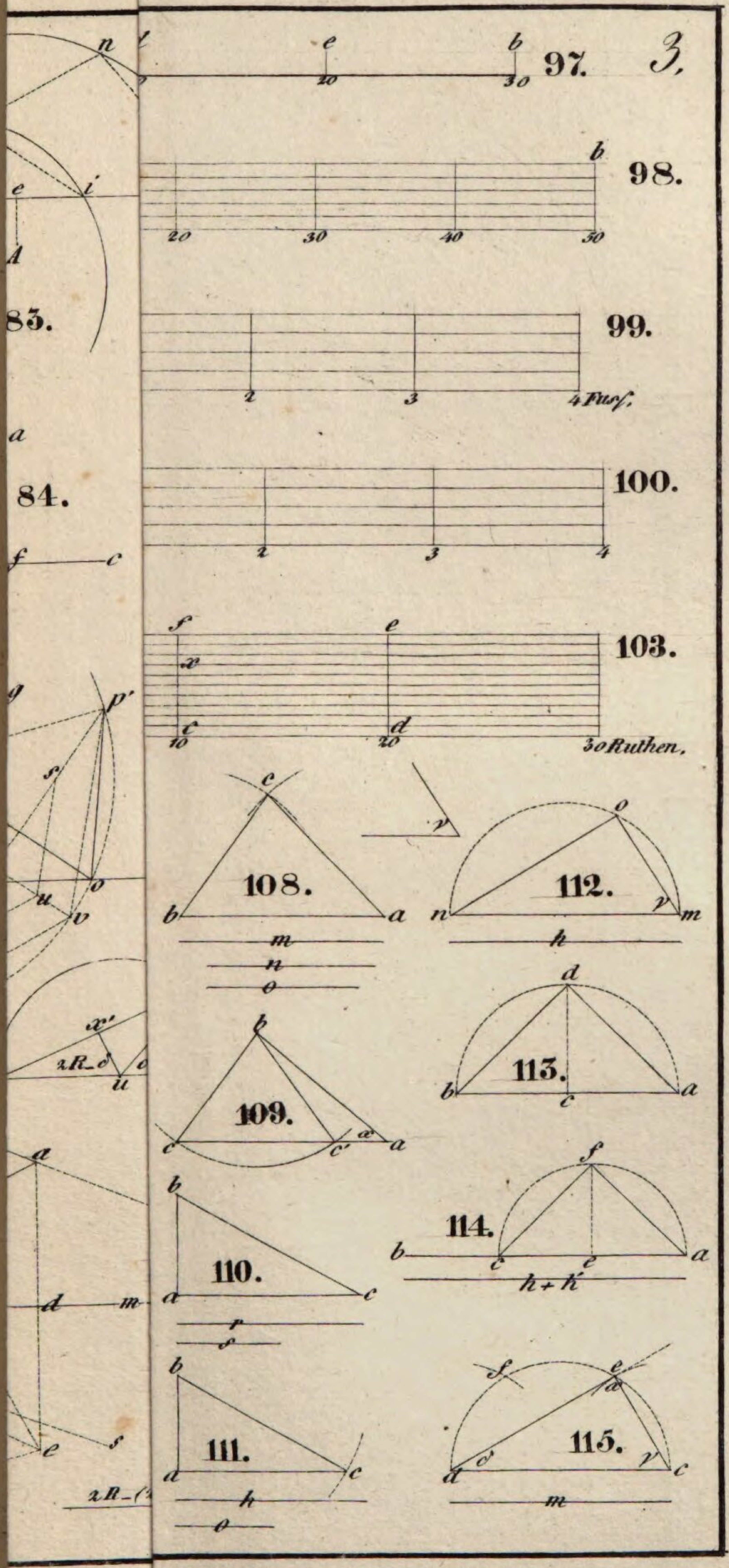
Staatliche Bibliothek
Regensburg

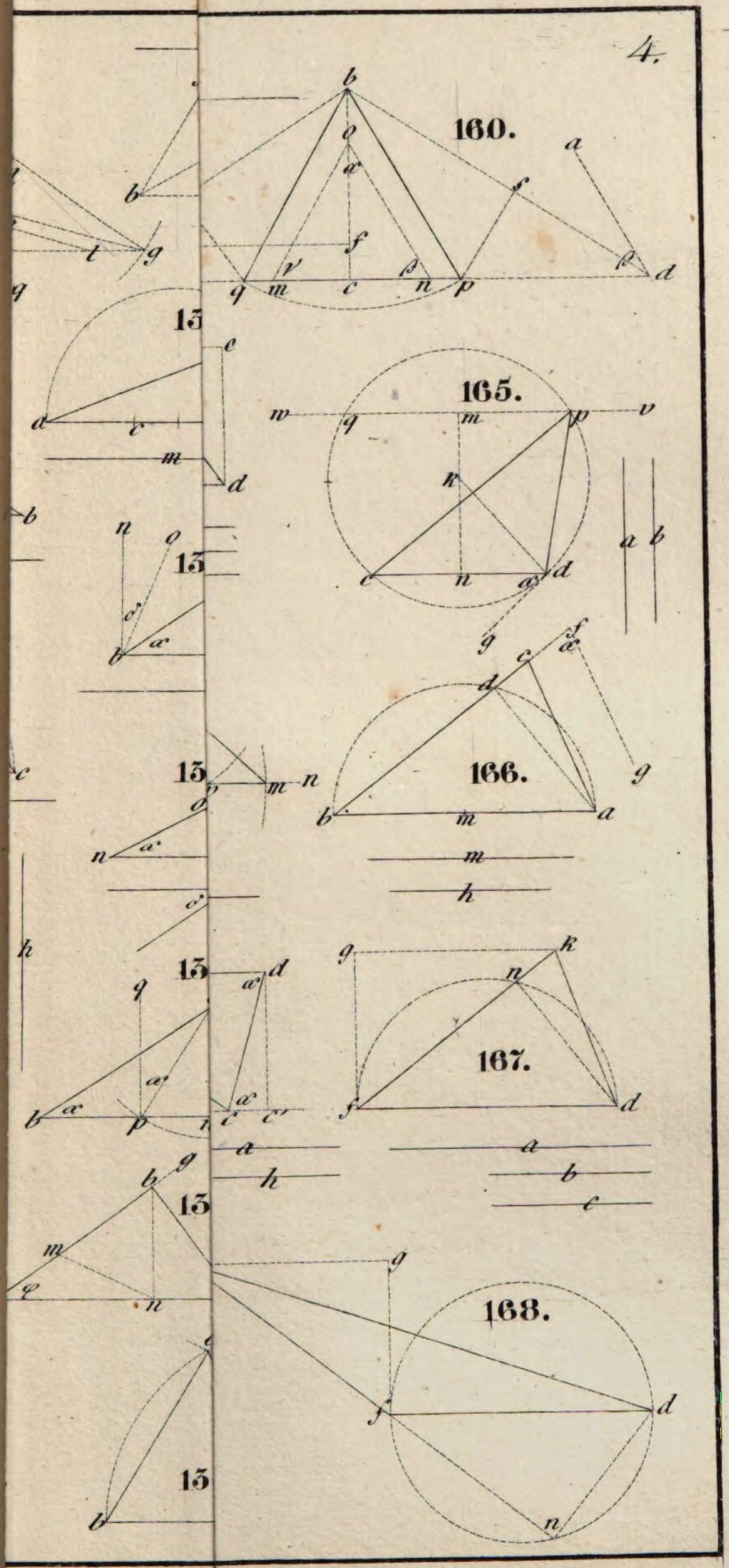


Hertel gest.

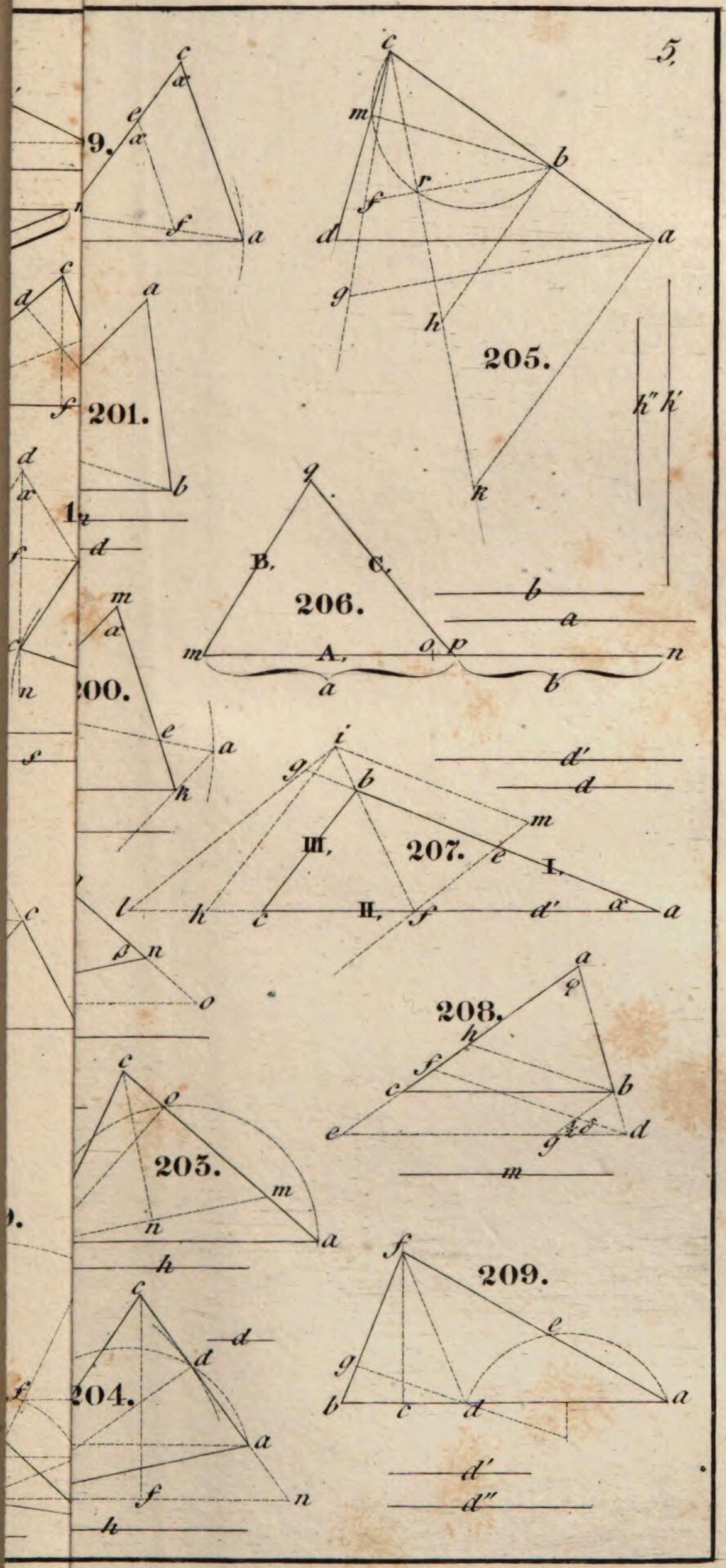


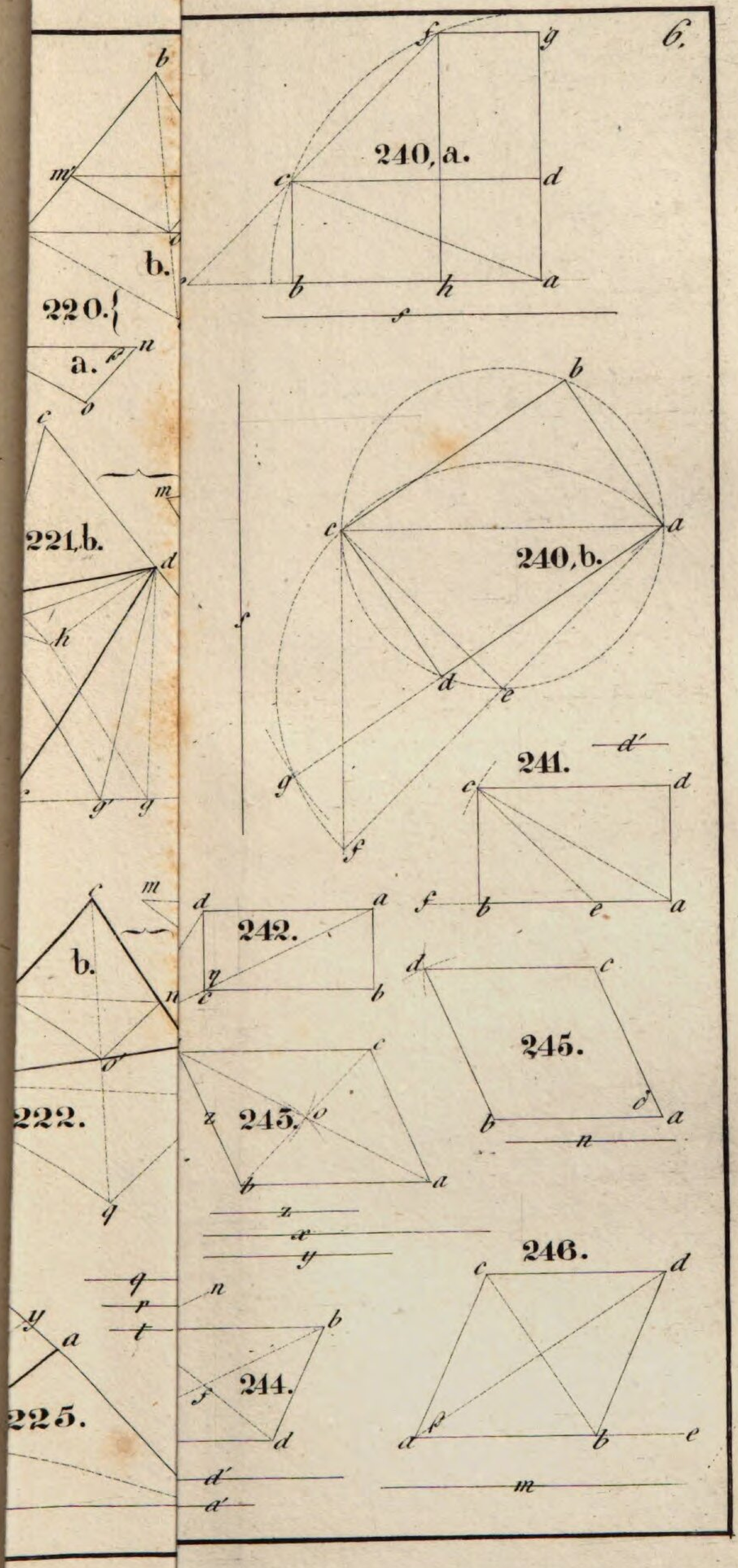
Hertel gest.


3,
97.
98.
99.
4 Fuss.
100.
103.
30 Ruthen.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
83.
84.

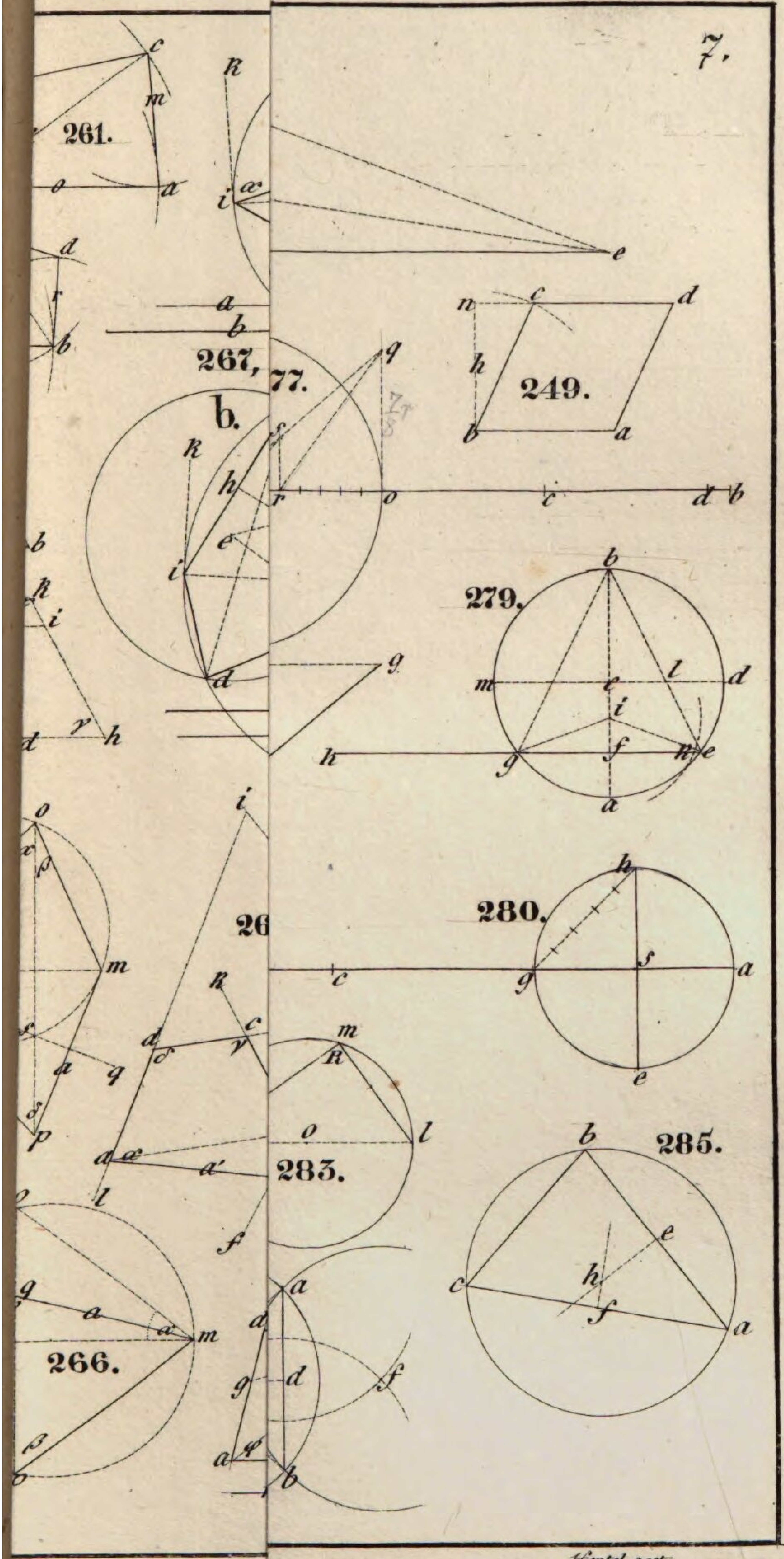


Hertel gest.

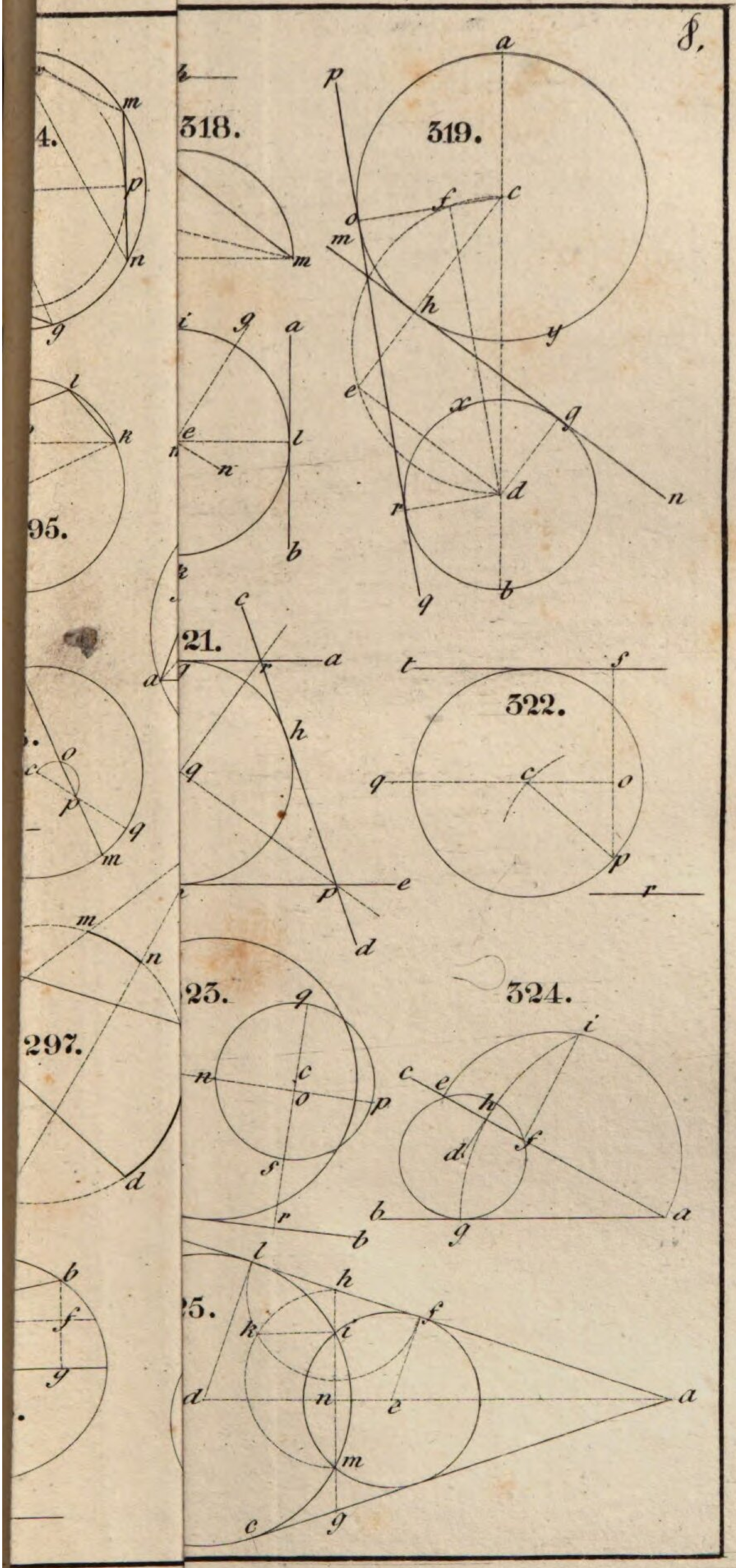

5.
201.
203.
204.
205.
206.
207.
208.
209.


6.
220.
221, b.
222.
225.
240, a.
240, b.
241.
242.
243.
244.
245.
246.

7.

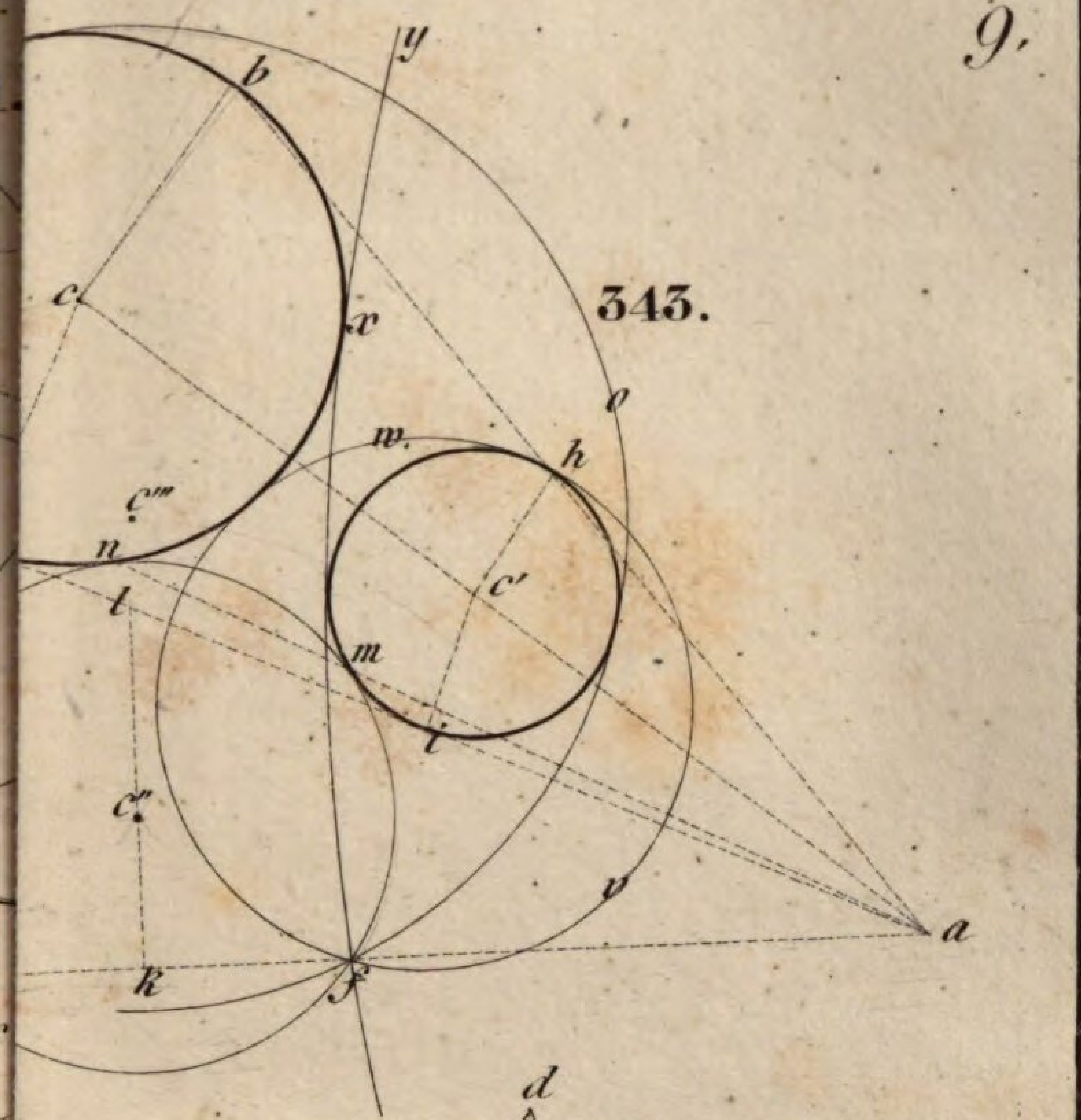


Hertel gest.

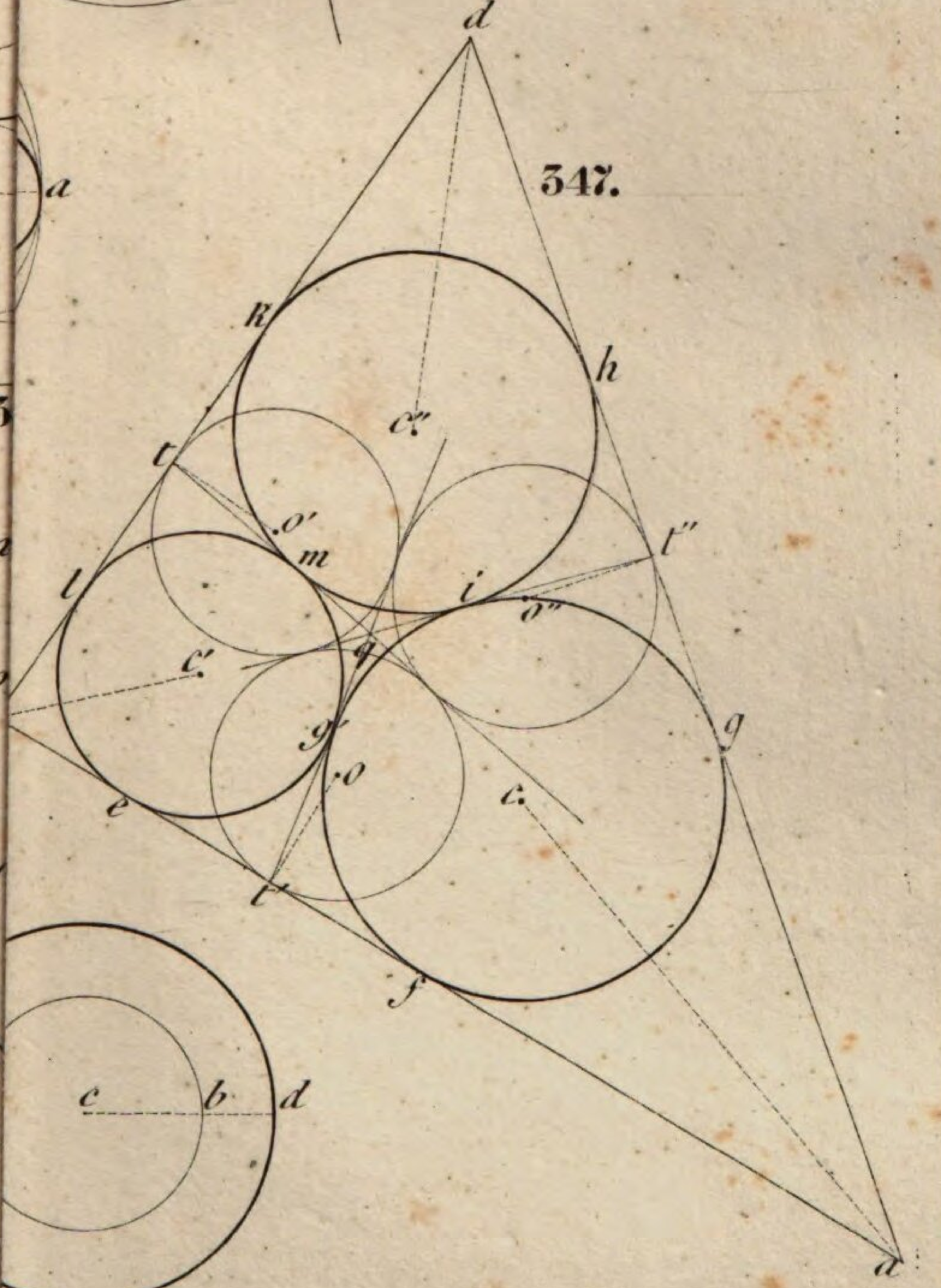

8,
318.
319.
21.
322.
23.
324.
297.
95.
25.

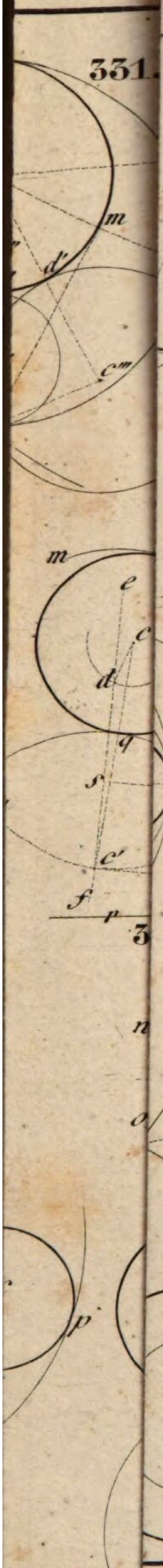
9.

343.



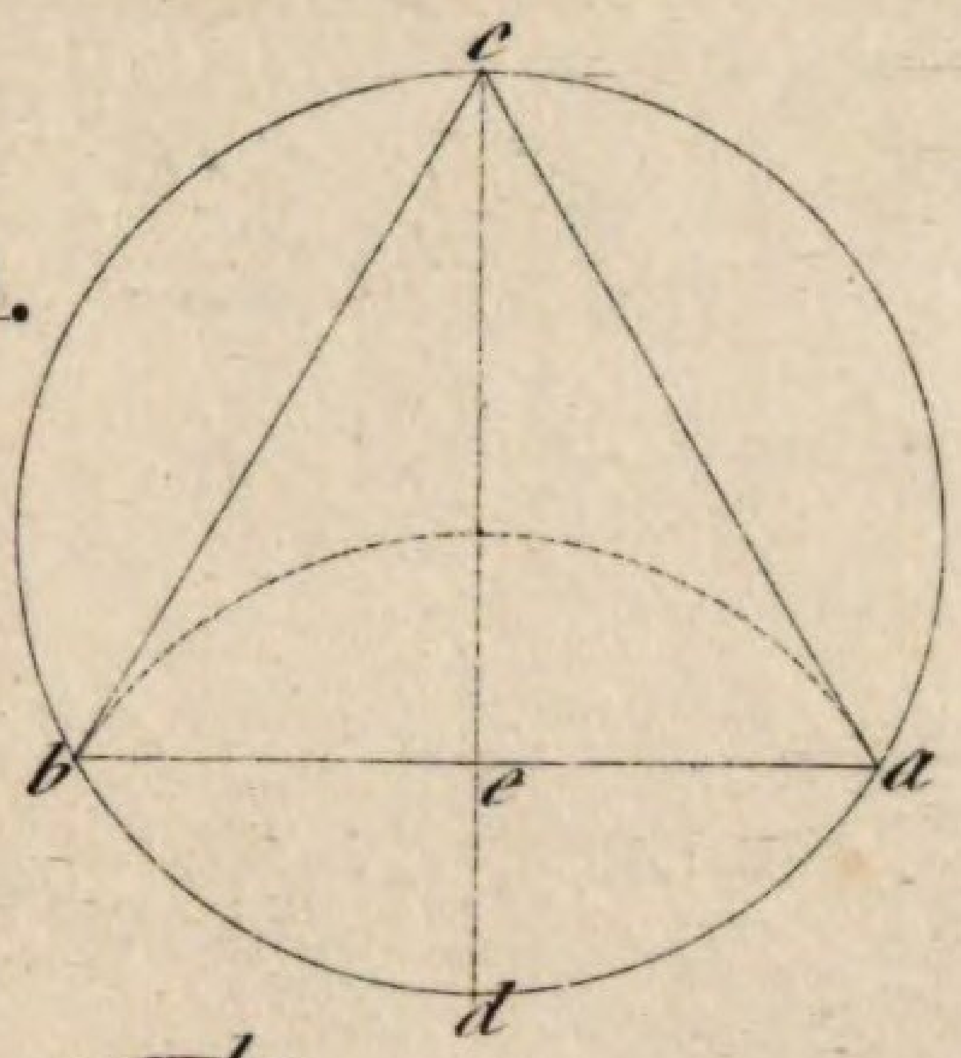
347.



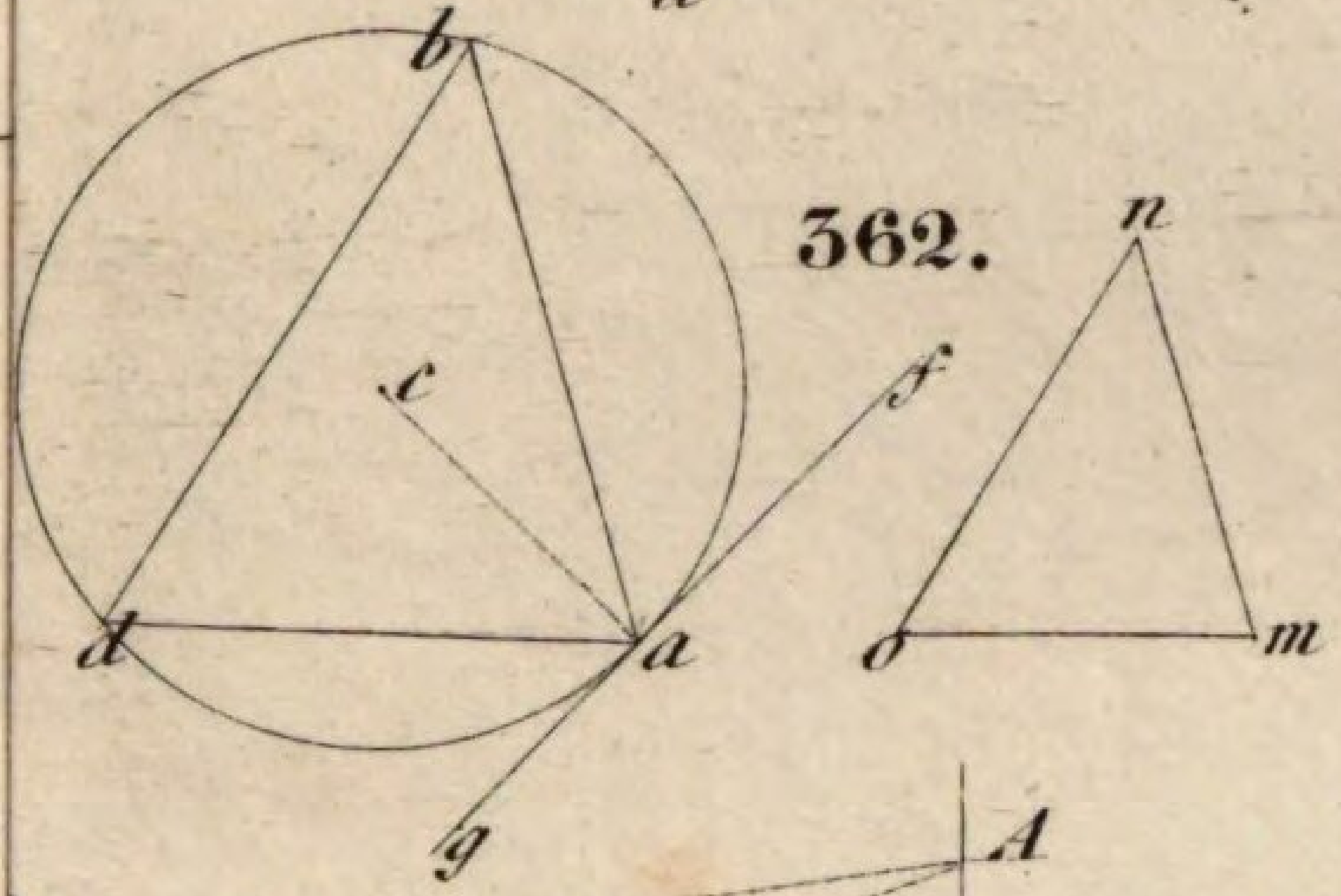


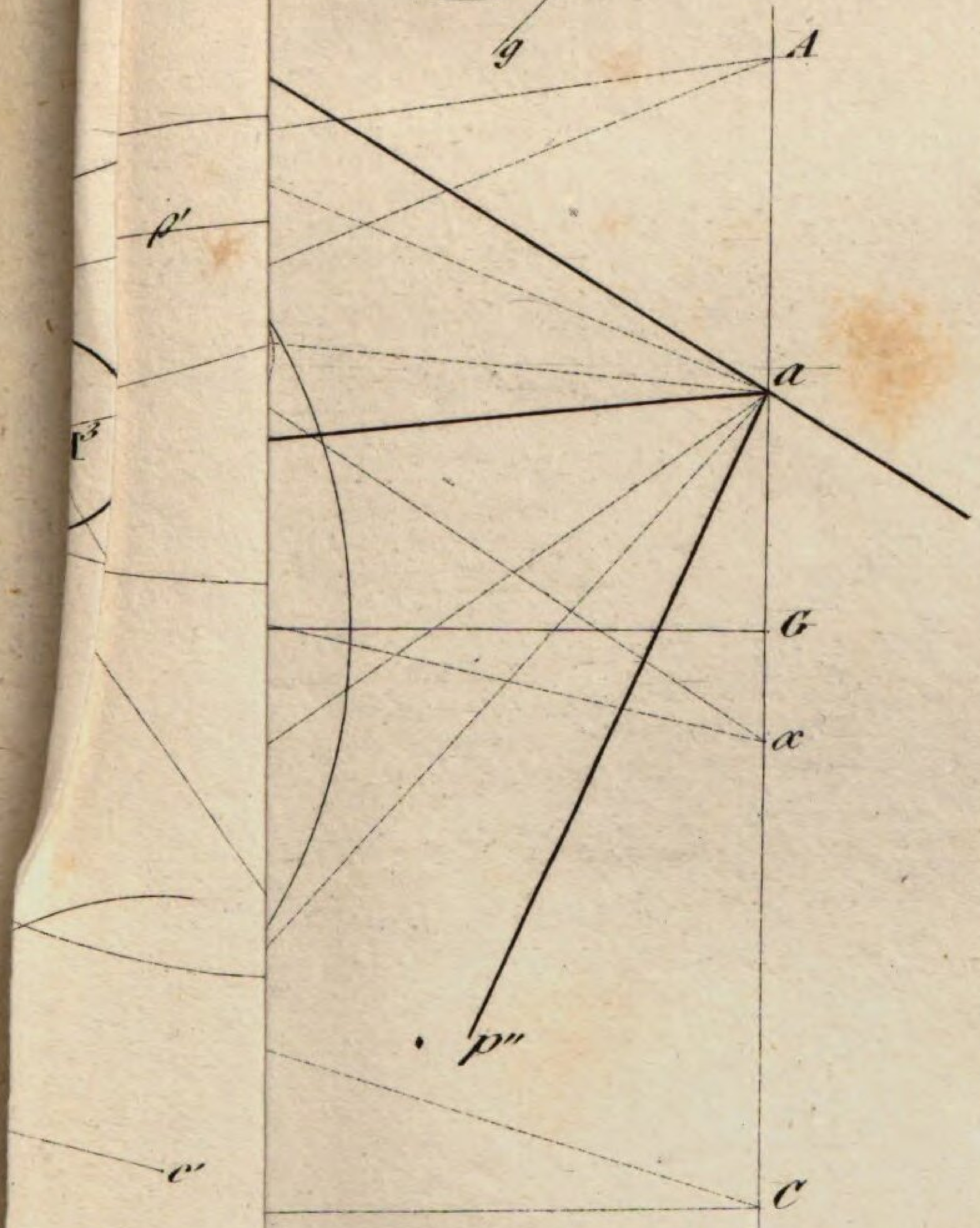
10.

361.

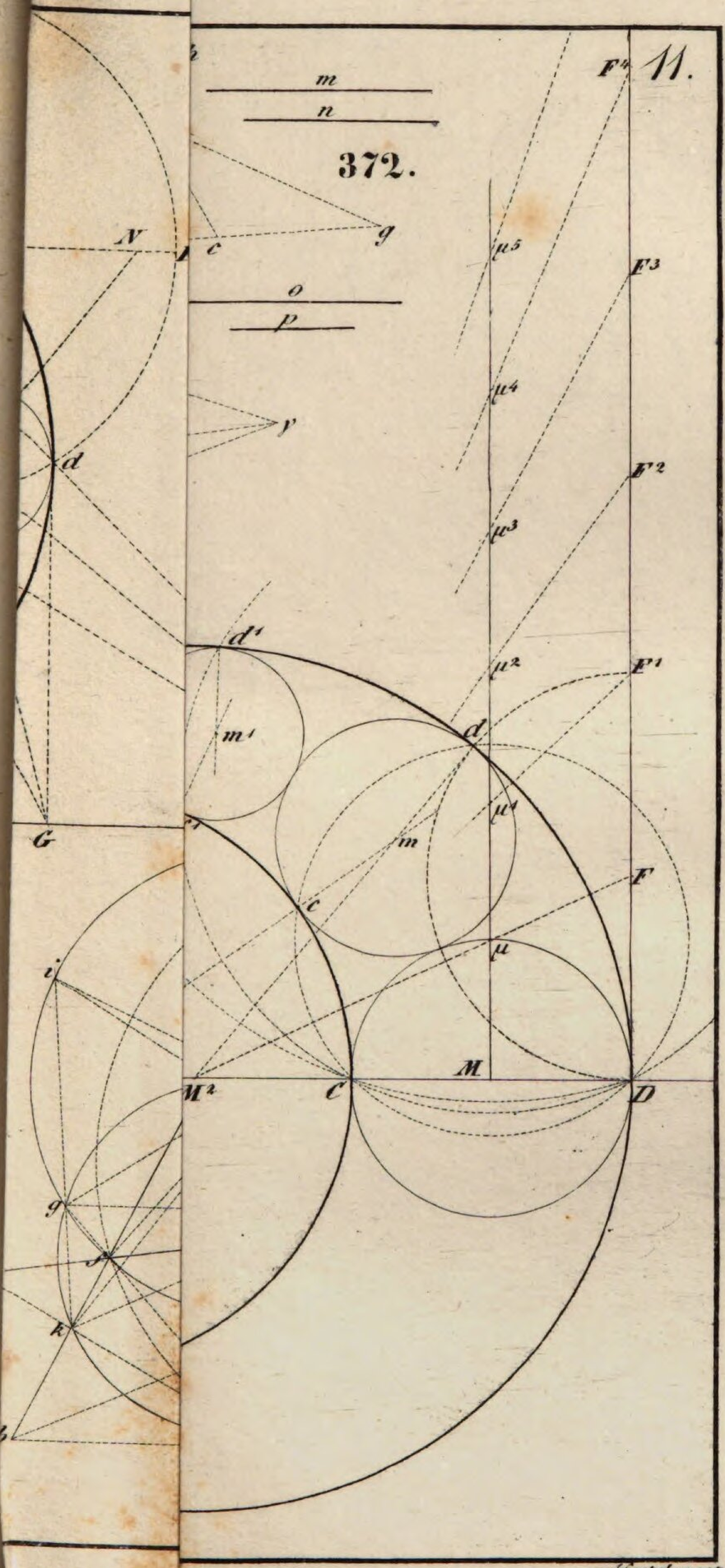


362.

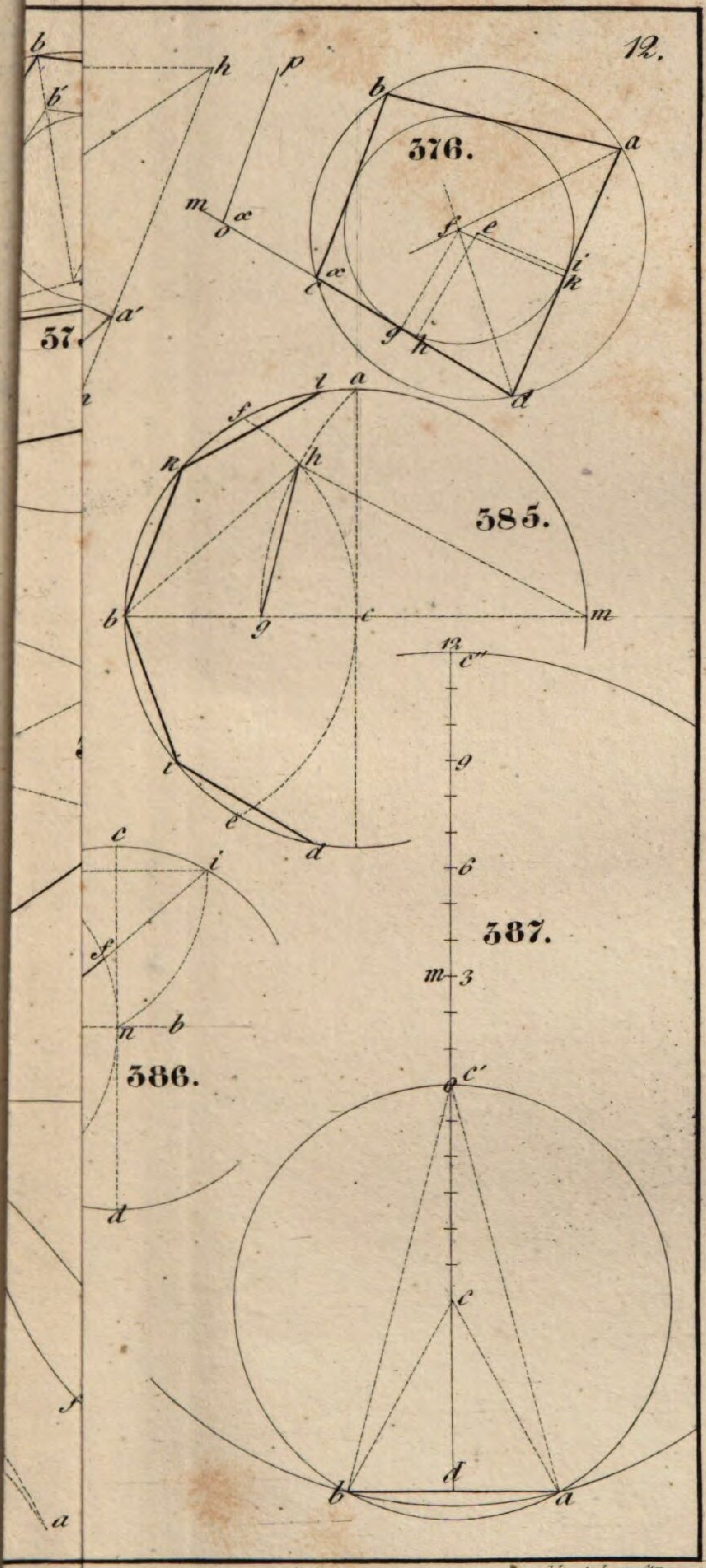




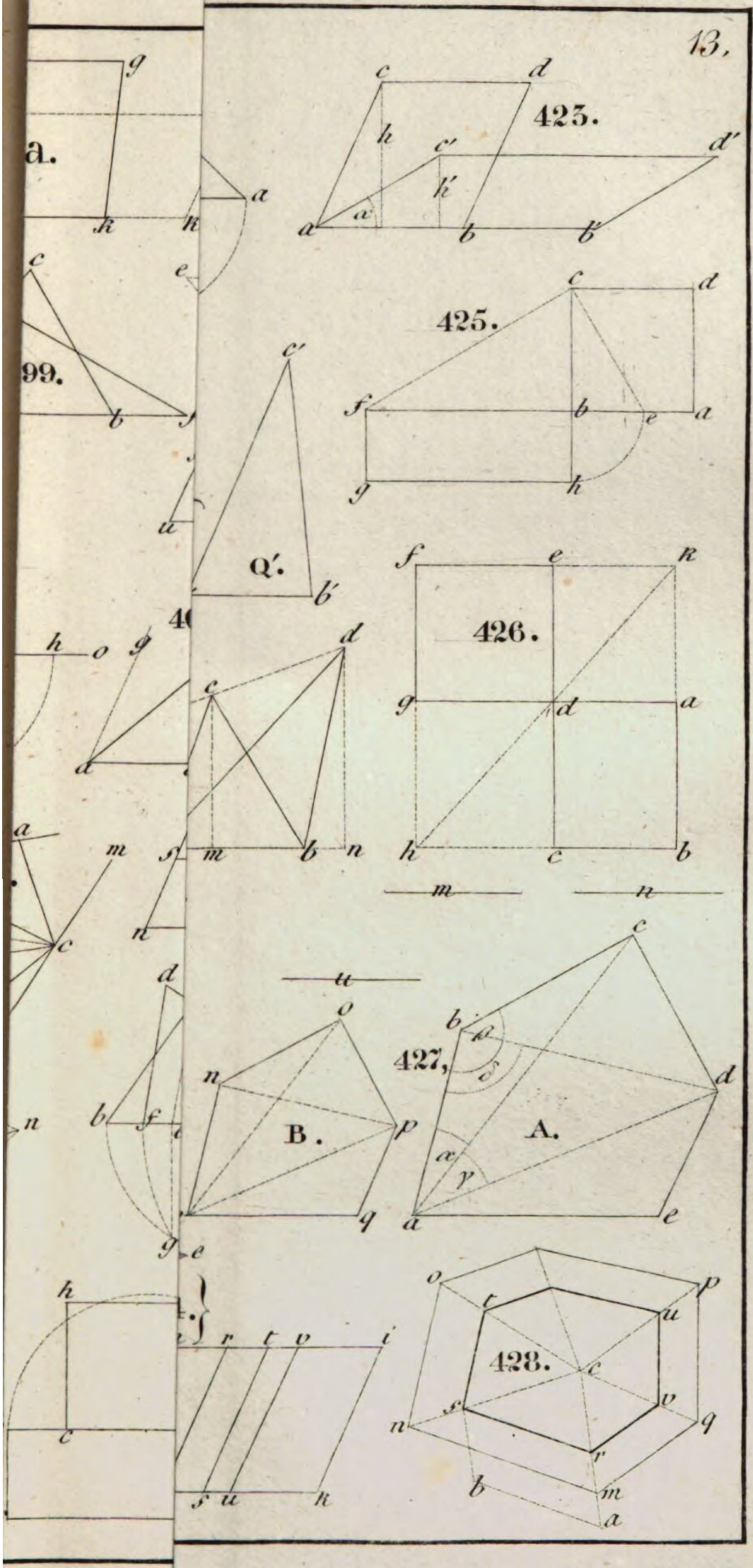
Hertel gest.

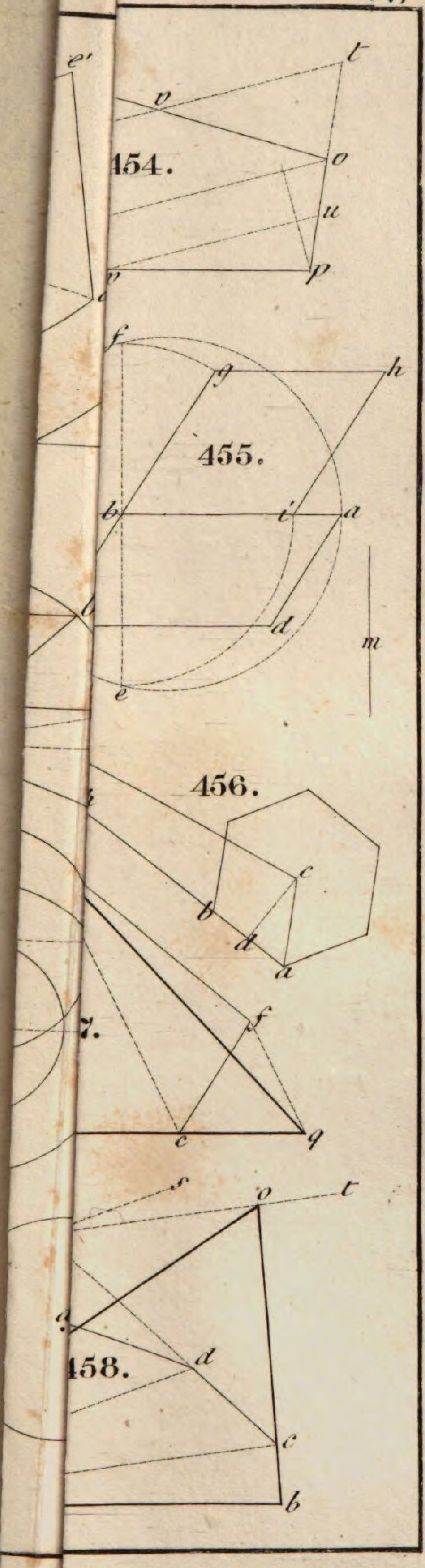

11.
372.
m
n
o
p
g
c
N
v
d
G
i
g
k
F⁴
F³
F²
F¹
F
μ⁵
μ⁴
μ³
μ²
μ¹
μ
d¹
m¹
d
m
c
M
M²
C
D

Hertel gest.

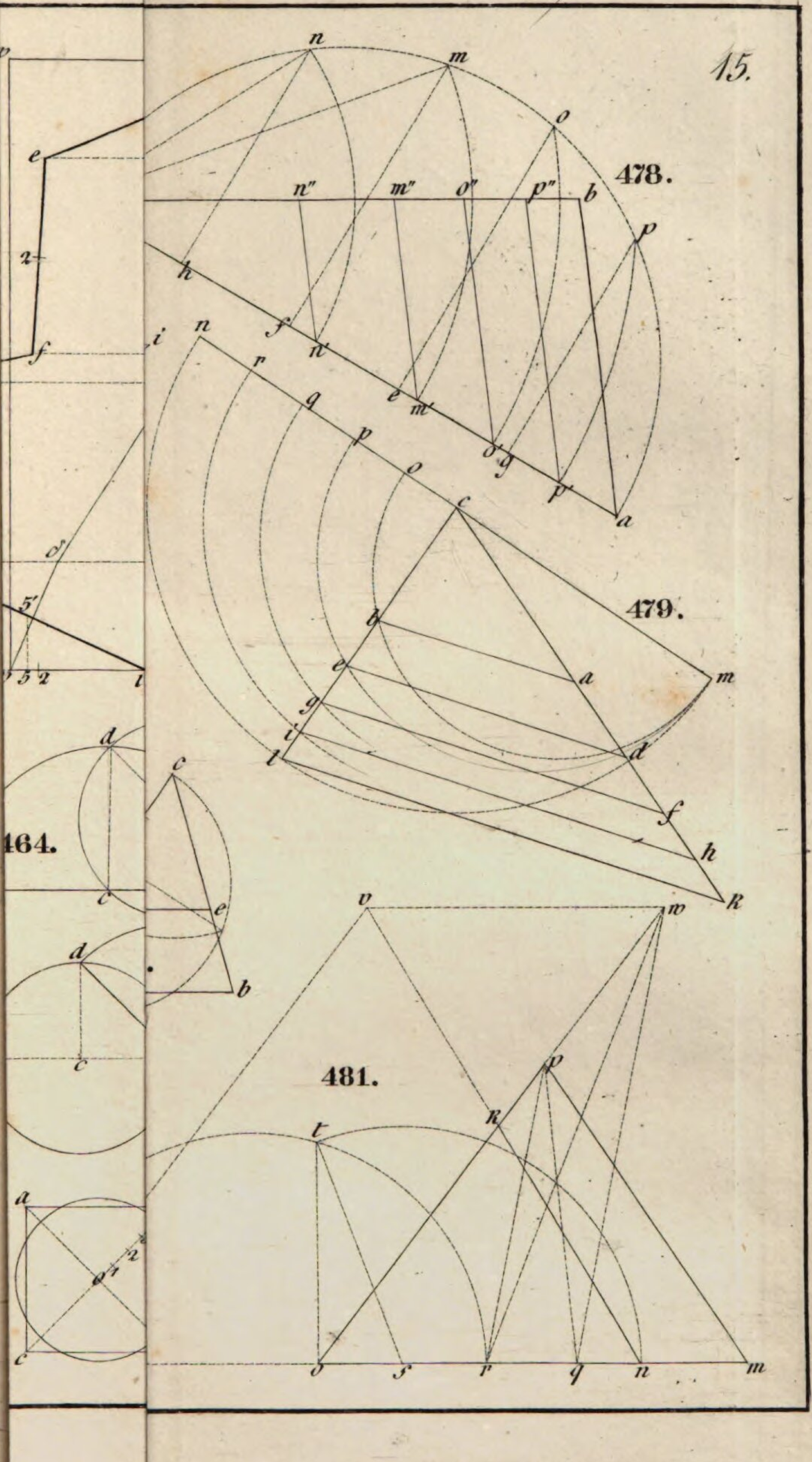


Hertel gest.


13.
423.
425.
426.
427,
A.
B.
Q'.
428.
99.
a.



t
v
454.
o
u
p
f
g
h
455.
b
i
a
d
m
e
456.
c
b
d
a
f
7.
c
q
s
o
t
a
458.
d
c
b

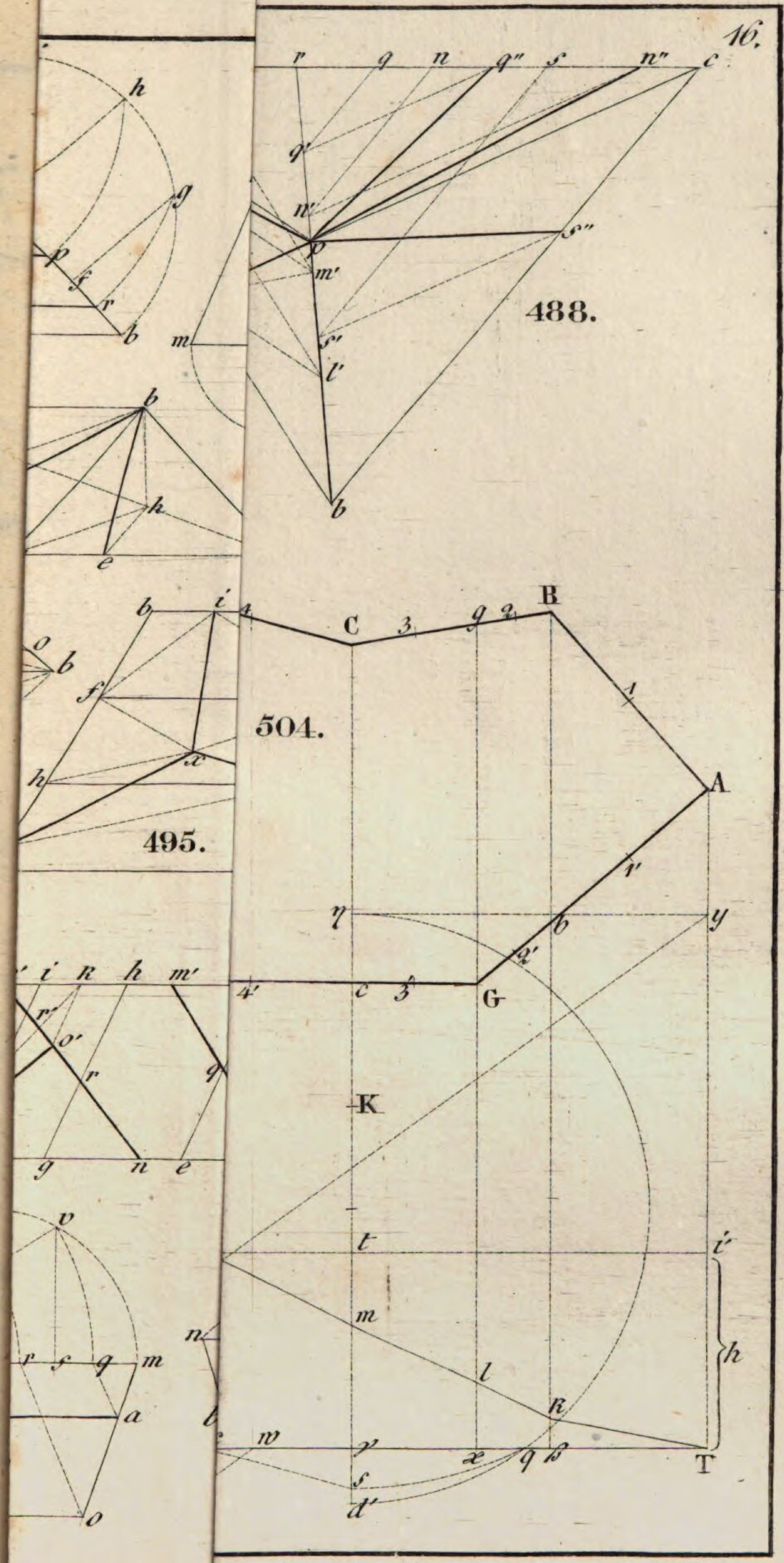


478.

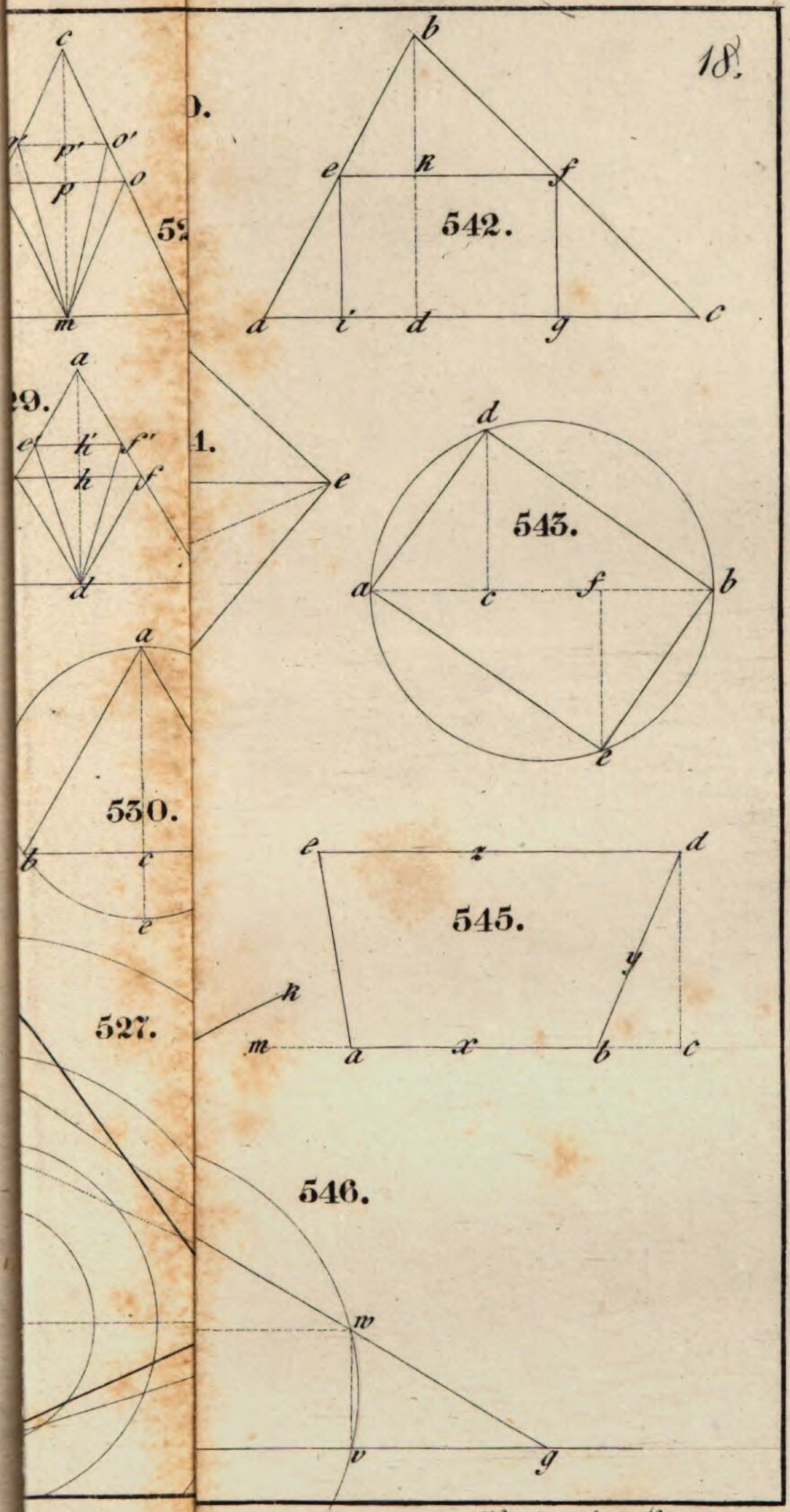
479.

481.

464.


16.
488.
504.
495.

17.
516.
517.
518.
519.



Hertel gest. Naumbg.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hertel, August W.

Sammlung von 574 geometrischen Aufgaben mit ihren Auflösungen und Beweisen zum Gebrauch beim Unterricht in höhern Bürger-, REal-, Gewerbschulen und Gymnasien, und beim Selbststudium der Geometrie

Leipzig 1838

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5071
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112186-3